Häufungspunkte und Satz von Bolzano und Weierstraß.

Definition:
Sei $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann wird der Grenzwert der Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ als Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet.

Beispiel: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die komplexe Folge mit $a_n = i^n$. Dann besitzt (a_n) die vier Häufungspunkte $\{i, -i, 1, -1\}$.

Satz: (Satz von Bolzano und Weierstraß)
Jede reelle beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge, d.h. die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat mindestens einen Häufungspunkt.

Beweisidee:
Verknüpfe das Bisektionsverfahren mit einer Intervallschachtelung:
Ist die Folge (a_n) beschränkt, so liegen alle Folgenglieder in einem endlichen Intervall $[A, B]$ und man kann rekursiv Teilintervalle $[A_k, B_k]$ definieren mit $A_k \nearrow$ und $B_k \searrow$.

Das Cauchysche Konvergenzkriterium.

Satz: (Cauchysches Konvergenzkriterium)
Der Vektorraum $\mathbb{R}$ ist vollständig, d.h. jede reelle Cauchyfolge ist konvergent.

Beweis: Zeige, dass jede Cauchyfolge beschränkt ist: für n und $N = N(\varepsilon)$ gilt

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < \varepsilon + |a_N|$$

Nach dem Satz von Bolzano und Weierstraß besitzt (a_n) einen Häufungspunkt ξ. Dann gilt für $m, n_k \geq N(\varepsilon/2)$

$$\begin{aligned} |a_m - \xi| &= |a_m - a_{n_k} + a_{n_k} - \xi| \\ &\leq \underbrace{|a_m - a_{n_k}|}_{\text{Cauchyfolge}} + \underbrace{|a_{n_k} - \xi|}_{\text{Häufungspunkt}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Notation:
$\liminf a_n$ = kleinster Häufungspunkt, $\limsup a_n$ = größter Häufungspunkt

3.4. Konvergenz in normierten Vektorräumen

Im letzten Abschnitt 3.3. haben wir uns mit Konvergenzkriterien für reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschäftigt.

Sei nun $(V, \|\cdot\|)$ wieder allgemein ein normierter Vektorraum.

Wiederholung aus Abschnitt 3.2:

Definition:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem normierten Vektorraum V. Dann heißt

- die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert (Limes) $a \in V$, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;:\; \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, n \geq N \;:\; \|a_n - a\| < \varepsilon$$

Beispiel:
Betrachte den Vektorraum $\mathcal{C}[0,1]$ aller stetigen Funktionen auf $[0,1]$.

Beispiel:
Betrachte den Vektorraum $\mathcal{C}[0,1]$ aller stetigen Funktionen auf $[0,1]$.

Für jedes $n \geq 2$ liegt die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{für } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 2 - nx & \text{für } x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \\ 0 & \text{für } x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$

in $\mathcal{C}[0,1]$, d.h. $f_n \in \mathcal{C}[0,1]$ für alle $n \geq 2$.

Unsere Frage:
Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im normierten Vektorraum $\mathcal{C}[0,1]$?

Unsere Antwort:
Bei ∞–dimensionalen Räumen hängt die Konvergenz von der Norm ab!

Konvergenz in endlichdimensionalen Vektorräumen.

Satz: (Normäquivalenzsatz)
Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, und seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ zwei Normen auf V. Dann gibt es zwei Konstanten $C, C' > 0$ mit

$$C\|v\| \leq \|v\|' \leq C'\|v\| \quad \text{für alle } v \in V$$

d.h. die beiden Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ sind äquivalent auf V.

Folgerung:

In endlichdimensionalen Vektorräumen ist die Konvergenz (und der Grenzwert) einer Folge lediglich von dem jeweiligen Vektorraum abhängig, aber nicht von der zugrundeliegenden Norm.

Eine Folge (a_n), die in einem endlichdimensionalen Vektorraum V bezüglich einer Norm $\|\cdot\|$ in V gegen einen Grenzwert $a \in V$ konvergiert, konvergiert ebenso bezüglich jeder anderen Norm $\|\cdot\|'$ in V gegen a.

Konvergenz von Folgen im $\mathbb{R}^n$.

Satz: Eine Folge $(\mathbf{x}_m)$ im $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann, wenn alle n Koordinatenfolgen $(x_j^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$, $j = 1, \ldots, n$ konvergieren. Der Grenzwert der Folge lässt sich komponentenweise berechnen.

Beweis: $\mathbf{x}_m \to \mathbf{x}$ ist äquivalent zu

$$\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}\|_\infty \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, 1 \leq j \leq n : \; |x_j^{(m)} - x_j| \to 0 \quad \text{für } m \to \infty$$

Beispiel: Für die Folge $(\mathbf{x}_m)$, gegeben durch

$$\mathbf{x}_m = \left(\frac{1}{m}, 1 + \exp\left(\frac{1}{m}\right), \frac{m^2+2m+3}{2m^2-1}\right)^T \in \mathbb{R}^3 \quad \text{für } m \in \mathbb{N}$$

gilt

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{x}_m = \left(0, 2, \frac{1}{2}\right)^T$$

Konvergenz in endlichdimensionalen Vektorräumen.

In endlichdimensionalen Vektorräumen gilt daher auch

1. das Cauchysche Konvergenzkriterium

$$\mathbf{a}_m \to \mathbf{a} \quad (m \to \infty)$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists N = N(\varepsilon) : \; m, n \geq N \; : \; \|\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_n\| < \varepsilon$$

2. und der Satz von Bolzano, Weierstraß

   Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beispiel: Für $a_n := z^n$, $z \in \mathbb{C}$ gegeben, gilt

$$|z| > 1 \quad \Rightarrow \quad |a_n| = |z|^n \text{ unbeschränkt } \Rightarrow (a_n) \text{ divergent}$$

$$|z| < 1 \quad \Rightarrow \quad |a_n| = |z|^n \to 0 \; (n \to \infty) \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z^n = 0$$

Kapitel 3. Konvergenz von Folgen und Reihen

3.5. Konvergenzkriterien für Reihen

Definition: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $a_n \in \mathbb{R}$ (oder $a_n \in \mathbb{C}$), eine reelle (komplexe) Folge. Dann heißt die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, definiert durch

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

eine reelle (oder komplexe) Reihe.

Die Folgenglieder s_n der Reihe werden als Partialsummen bezeichnet.

Falls die Folge (s_n) der Partialsummen gegen einen Grenzwert s konvergiert, d.h. die Reihe konvergiert, so schreibt man

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

für den Grenzwert der Reihe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

3.5. Konvergenzkriterien für Reihen

Satz: (Unmittelbare Konvergenzkriterien für Reihen)

a) Es gilt das Cauchysches Konvergenzkriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N : m, n \geq N : \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

b) Es gilt die notwendige Bedingung

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \implies \lim_{k \to \infty} a_k = 0$$

Beweis:

a) folgt unmittelbar aus dem Cauchy–Kriterium für Folgen.

b) folgt aus dem ersten Teil für den Spezialfall $m = n$.

Weitere unmittelbare Konvergenzkriterien für Reihen.

Satz:

a) Seien $\sum a_k$, $\sum b_k$ konvergente Reihen. Dann konvergieren die Reihen $\sum(a_k + b_k)$, $\sum(\lambda a_k)$, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

b) Leibnizsches Kriterium: Eine alternierende Reihe der Form $\sum (-1)^k a_k$, $a_k \geq 0$, deren (nicht–negativen) Folgenglieder $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge bilden, konvergiert, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k$$

Beweis zum Leibnizschen Kriterium für Reihen.

Für die Reihen

$$u_n := \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k a_k \qquad v_n := \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k$$

gilt

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \left(a_{2n} - a_{2n+1}\right) \geq u_n \\ v_{n+1} &= v_n - \left(a_{2n+1} - a_{2n+2}\right) \leq v_n \\ v_n &= u_n + a_{2n} \geq u_n \\ v_n - u_n &= a_{2n} \to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

Somit bilden die Folgen (u_n), (v_n) eine Intervallschachtelung, konvergieren gegen einen gemeinsamen Grenzwert, und es gilt

$$u_n \quad \leq \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \quad \leq \quad v_n$$

Beispiele: die geometrische Reihe.

Beispiel: Für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt

$$x^m - y^m = (x - y) \sum_{j=1}^{m} x^{m-j} y^{j-1}$$

Insbesondere mit $x = 1$, $y = q \neq 1$ und $m = n + 1$ gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

für die Partialsummen der geometrischen Reihe $\sum q^k$. Daraus folgt, dass

- die geometrische Reihe für $|q| < 1$ konvergiert mit Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}$$

- die geometrische Reihe für $|q| > 1$ divergiert.

Beispiele: die harmonische Reihe.

Beispiel: Die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

divergiert, denn es gilt

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{m} = \frac{1}{m} \sum_{k=n}^{m} 1 = \frac{m-n+1}{m} \to 1 \quad (m \to \infty)$$

und somit ist das Cauchy–Kriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \; m, n \geq N \; : \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

für $\varepsilon < 1$ verletzt.

Beispiele: die alternierende harmonische Reihe.

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konvergiert nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = \ln 2 = 0.69314\dots$$

für den Grenzwert der alternierenden harmonischen Reihe.

Zur Erinnerung: Alternierende Reihen $\sum (-1)^k a_k$, $a_k \geq 0$, deren (nicht–negativen) Folgenglieder eine monoton fallende Nullfolge bilden, sind konvergent.

Absolute Konvergenz von Reihen.

Definition: Eine Reihe $\sum a_k$ heißt absolut konvergent, falls die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert.

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

ist nicht absolut konvergent, denn es gilt $a_k = (-1)^k \frac{1}{k+1}$ und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{1}{k+1} \right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

ist die harmonische Reihe, die nicht konvergiert.

Kriterien für absolute Konvergenz von Reihen.

Satz: Sei $\sum a_k$ ein Reihe. Dann gelten die folgenden Konvergenzkriterien.

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\iff$ $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k| \right)_{n \geq 0}$ beschränkt

b) Majorantenkriterium

$$|a_k| \leq b_k \ \wedge \ \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

c) Quotientenkriterium Sei $a_k \neq 0$ $(\forall\, k \geq k_0)$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q < 1 \quad (\forall\, k \geq k_0) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

d) Wurzelkriterium

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \quad (\forall\, k \geq k_0) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

Kriterien für absolute Konvergenz von Reihen.

Beweis:

a): Die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right)_{n\geq 0}$ ist monoton wachsend und daher genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

b): Da $|a_k| \leq b_k$ gilt $b_k \geq 0$ für alle k.

Somit ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sogar absolut konvergent.

Nach Teil a) ist die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)_{n\geq 0}$ beschränkt. Mit

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{n} b_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$$

folgt, dass die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right)$ beschränkt und somit nach a) absolut konvergent ist.

Kriterien für absolute Konvergenz von Reihen.

Beweis: (Fortsetzung)

c): Aus $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$ für alle $k \geq k_0$ folgt $|a_k| \leq q^{k-k_0}|a_{k_0}|$ per Induktion.

Somit gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} |a_k| &\leq \sum_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + |a_{k_0}| \sum_{j=0}^{n-k_0} q^j \\ &\leq \underbrace{\sum_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + |a_{k_0}| \frac{1}{1-q}}_{\text{Beschränktheitskonstante}}\end{aligned}$$

für alle n.

Nach Teil a) ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ dann auch absolut konvergent.

Kriterien für absolute Konvergenz von Reihen.

Beweis: (Fortsetzung)

d): Aus $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q \ (k \geq k_0)$ folgt direkt $|a_k| \leq q^k$ für alle $k \geq k_0$ und

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + \frac{q^{k_0}}{1-q} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{absolut konvergent}$$

Bemerkung:

a) Das Quotienten– bzw. Wurzelkriterium ist erfüllt, falls gilt

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$

b) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist dagegen divergent, falls gilt

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$$

Beispiele zur Konvergenzuntersuchung bei Reihen.

Beispiel: Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

Es gilt

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

und daher

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Daraus folgt die (absolute) Konvergenz der Reihe mit Grenzwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Beispiele zur Konvergenzuntersuchung bei Reihen.

Beispiel: Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \qquad (r \in \mathbb{N}, r \geq 2)$$

Nach dem letzten Beispiel gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r} &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &< 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} < 2 \end{aligned}$$

Damit ist die Reihe (absolut) konvergent.
Einige Grenzwerte (ohne Beweis)

$$\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}$$