Bemerkungen und weitere Bezeichnungen.

- Gilt $M \cap N = \emptyset$, so nennt man M und N disjunkt.
- Verknüpfung von endlich viele Mengen

$$\begin{aligned}
\bigcup_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \\
&= \{a \,|\, \exists\, i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, a \in A_i\} \\
\bigcap_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \\
&= \{a \,|\, \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, a \in A_i\} \\
\prod_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \\
&= \{(a_1, \ldots, a_n) \,|\, \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, a_i \in A_i\}
\end{aligned}$$

Bemerkungen und weitere Bezeichnungen.

- Für geordnete Paare bzw. n–Tupel gilt:

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \iff a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2$$

$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \iff \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, x_i = y_i$$

- Wichtige Cartesische Produkte:
  - die Euklidische Ebene

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

  - der dreidimensionale Euklidische Raum

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

  - der n–dimensionale Euklidische Raum

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{–fach}} = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{R}\}$$

Einige Beispiele für Mengen im $\mathbb{R}^n$.

- Kreisscheibe mit Radius $r = 1$.

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

- Zwei Streifen in der Euklidischen Ebene.

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 5 \leq x^2 + 1 \leq 17\}$$

Beachte:

$$5 \leq x^2 + 1 \leq 17 \Leftrightarrow 4 \leq x^2 \leq 16 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq -2 \vee 2 \leq x \leq 4$$

und somit gilt

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -4 \leq x \leq -2 \ \vee \ 2 \leq x \leq 4\}$$

Einige Beispiele für Mengen im $\mathbb{R}^n$.

- Intervalle in $\mathbb{R}$. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

$$
\begin{array}{lcll}
[a,b] & := & \{x \,|\, a \leq x \leq b\} & \text{abgeschlossenes Intervall} \\
(a,b) & := & \{x \,|\, a < x < b\} & \text{offenes Intervall} \\
[a,b) & := & \{x \,|\, a \leq x < b\} & \text{halboffenes Intervall} \\
(a,b] & := & \{x \,|\, a < x \leq b\} & \text{halboffenes Intervall}
\end{array}
$$

- Querschnitt eines T–Trägers.

$$
\begin{aligned}
M &:= M_1 \cup M_2 \\
M_1 &:= \left[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right] \times [-\gamma, 0] \\
M_2 &:= \left[-\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right), \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)\right] \times [0, \delta]
\end{aligned}
$$

1.3. Funktionen

Definition:
Seien M und N Mengen. Unter einer Funktion (oder einer Abbildung) von M nach N verstehen wir eine Vorschrift, die jedem Element $x \in M$ genau ein Element $y \in N$ zuordnet. Die Zuordnung $x \mapsto y$ ist also eindeutig.

Notationen und Bezeichnungen.

- $f : M \to N$, $y = f(x)$ bzw. $x \mapsto f(x)$ für alle $x \in M$. Somit gilt:

$$f : M \to N \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in M \;:\; \exists_1 y \in N \;:\; y = f(x)$$

- M nennt man Definitionsbereich (oder Urbildbereich) von f.
- N nennt man Zielmenge (oder Bildbereich) von f.
- Die Menge

$$\mathrm{graph}(f) = \{(x, f(x)) \,|\, x \in M\} \subset M \times N$$

heißt Graph der Funktion f.

Sei $f : M \to N$ eine Funktion.

1. Zu $A \subset M$ heißt die Menge

$$f(A) = \{b \in N \mid \exists a \in A : f(a) = b\} = \{f(a) \in N \mid a \in A \subset M\} \subset N$$

das Bild von A unter der Funktion f.

2. Zu $B \subset N$ heißt die Menge

$$f^{-1}(B) = \{a \in M \mid f(a) \in B\} \subset M$$

das Urbild von B unter der Funktion f.

Für vorgegebene Mengen M und N und eine Funktion $f : M \to N$ definieren wir nun die Begriffe

surjektiv, injektiv und bijektiv.

Definition:

Sei $f : M \to N$ eine Funktion von M nach N.

Die Funktion f heißt surjektiv, falls die Gleichung $y = f(x)$ für alle $y \in N$ mindestens eine Lösung $x \in M$ besitzt, d.h.

$$\forall\, y \in N \;:\; \exists\, x \in M \;:\; y = f(x)$$

Weiterhin heißt f injektiv, falls die Gleichung $y = f(x)$ für $y \in N$ höchstens eine Lösung $x \in M$ besitzt, d.h.

$$\forall\, x_1, x_2 \in M \;:\; (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

Schließlich heißt die Funktion f bijektiv, falls f surjektiv und injektiv ist.

Ein paar Beispiele auf der Folie ...

Surjektive, injektive und bijektive Funktionen.

Bemerkungen.

1. Eine injektive Funktion $f : M \to N$ lässt sich invertieren, denn zu jedem $y \in f(M)$ existiert genau ein $x \in M$ mit $y = f(x)$.
2. Für eine injektive Funktion $f : M \to N$ wird deren Umkehrfunktion $f^{-1} : f(M) \to M$ definiert durch
$$f^{-1}(y) = x \quad \text{für } \; y \in f(M), \text{ wobei } f(x) = y.$$
3. Falls $f : M \to N$ bijektiv ist, so gilt
$$f(M) = N \quad \text{und} \quad f^{-1}(N) = M$$
4. Die Umkehrfunktion einer reellwertigen injektiven Funktion einer reellen Variablen erhält man durch Spiegelung an der Diagonalen.

Ein paar Beispiele auf der Folie ...

Definition: Seien $f : M \to N$ und $g : N \to P$ Funktionen. Dann ist die Komposition $g \circ f$ von f und g als eine Funktion definiert durch

$$g \circ f : M \to P, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{für } x \in M.$$

Wir erhalten also die Hintereinanderschaltung

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \quad \text{bzw.} \quad M \xrightarrow{g \circ f} P$$

Eigenschaften von Kompositionen.

1. Assoziativität. Es gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

2. Kompositionen sind in der Regel nicht kommutativ, d.h.

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Beispiel: Kompositionen sind in der Regel nicht kommutativ.

Wir betrachten die beiden reellwertigen Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2x \\ g(x) &= x + 1 \end{aligned}$$

die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind.

Dann folgt

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(x^2 + 2x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \\ (f \circ g)(x) &= f(x+1) = (x+1)^2 + 2(x+1) = x^2 + 4x + 3 \end{aligned}$$

und somit gilt $g \circ f \neq f \circ g$.

Die symmetrische Gruppe $S(M)$.

Definition: Sei M eine nichtleere Menge. Dann heißt die Menge

$$S(M) = \{f : M \to M \,|\, f \text{ bijektiv}\}$$

die symmetrische Gruppe der Menge M.

Insbesondere ist die Identität $\mathrm{id}_M : M \to M$, definiert durch $\mathrm{id}_M(x) = x$ für alle $x \in M$, ein Element von $S(M)$.

Die symmetrische Gruppe $S(M)$ erfüllt die Gruppenaxiome.

$$\begin{array}{llcll}
\text{G1)} & h \circ (g \circ f) & = & (h \circ g) \circ f & \text{(Assoziativgesetz)} \\
\text{G2)} & f \circ id_M & = & id_M \circ f = f & \text{(neutrales Element)} \\
\text{G3)} & f \circ f^{-1} & = & f^{-1} \circ f = id_M & \text{(inverses Element)}
\end{array}$$

Dabei bezeichnet f^{-1} die Umkehrfunktion von f.

Elementare reelle Funktionen I.

- **Affin–lineare Funktionen.**

$$f(x) = a_1 x + a_0, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

- **Polynome.**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$.

- Die **Exponentialfunktion** $f(x) = a^x$ zur Basis $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Spezialfall: Basis e, wobei die Eulersche Zahl e definiert ist durch

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2.718281828459045235\ldots$$

Es gilt die Funktionalgleichung

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

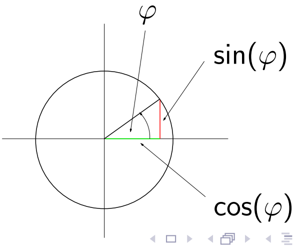
- Der **Logarithmus**: Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

$$f(x) = \log_a x : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \ a > 0, a \neq 1$$

Spezialfall: Basis e ergibt den natürlichen Logarithmus.

$$\ln(x) = \log(x) = \log_e(x)$$

- **Trigonometrische Funktionen.**
Darstellung am Einheitskreis



Eigenschaften trigonometrischer Funktionen I.

- Wir definieren die trigonometrischen Funktionen über das Bogenmaß.

$$\sin, \cos : [0, 2\pi) \to [-1, 1]$$

- Für alle $\varphi \in [0, 2\pi)$ gilt

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

- Periodizität: Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \sin(\varphi) &= \sin(\varphi + 2\pi) \\ \cos(\varphi) &= \cos(\varphi + 2\pi) \end{aligned}$$

somit sind Sinus und Cosinus auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

$$\sin, \cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

Eigenschaften trigonometrischer Funktionen II.

- Symmetrie: Für alle $\varphi \in [0, 2\pi)$ gilt

$$\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi), \quad \cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$$

- Wertetafel.

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin\varphi$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\varphi$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

- Additionstheoreme.

  Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}$$