Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Reiner Lauterbach

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Wintersemester 2012/13

Informationen zur Lehrveranstaltung Analysis I.

1. Vorlesung:
   Mittwoch, 14:15–15:45 Uhr, Audimax II, AIW, ET, IIW
   Donnerstag, 9:45–11.15 Uhr, Audimax I, Rest

2. Anleitung:
   Freitag, 11:30–13:00 Uhr, Audimax I, Rest
   Freitag, 14:15–15:45 Uhr, Audimax II, AIW, ET, IIW

3. Übungsgruppen:
   14–tägig, im Wechsel mit der Linearen Algebra I, Beginn diese Woche

4. Internetseiten:
   `www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html`

5. Textbuch:
   R. Ansorge, H. J. Oberle: Mathematik für Ingenieure, Band 1,
   3. Auflage, Wiley–VCH, Berlin, 2000.

Inhalte der Vorlesung Analysis I.

1. Aussagen, Logik und Mengen.
2. Zahlensysteme, Relationen und Funktionen.
3. Folgen, Reihen und Konvergenz.
4. Vektorräume und Normen.
5. Stetige und gleichmäßig stetige Funktionen.
6. Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln.
7. Mittelwertsätze, lokale Extrema, Satz von Taylor.
8. Regel von de l'Hospital, Kurvendiskussion.
9. Iterationsmethoden und Banachscher Fixpunktsatz.

1.1. Aussagen

Beispiele für Aussagen (mathematische und nicht–mathematische)

- heute ist Donnerstag
- 16 ist eine Quadratzahl
- heute scheint die Sonne
- 5 ist eine gerade Zahl

Kennzeichnende Eigenschaft mathematischer Aussagen:

Aussagen sind entscheidbar wahr oder falsch.

Wahrheitswerte: Sei A eine Aussage. Wir ordnen der Aussage A einen eindeutigen Wahrheitswert $w(A)$ zu:

$$\begin{aligned} w(A) = 0 &\iff A \text{ ist falsch} \\ w(A) = 1 &\iff A \text{ ist wahr.} \end{aligned}$$

Verknüpfung von Aussagen:

$\neg A$	:	Negation			
$A \wedge B$	:	Konjunktion	$A \vee B$	:	Disjunktion
$A \Rightarrow B$	:	Implikation	$A \Leftrightarrow B$	:	Äquivalenz

Wahrheitswertetafeln:

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg A)$	$w(A \wedge B)$	$w(A \vee B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(A \Leftrightarrow B)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Beachte:

Eine Implikation ist immer wahr, wenn die Prämisse falsch ist.

Also gilt: $A \Rightarrow B \;\Leftrightarrow\; \neg A \vee B$

1.1. Aussagen

Definition:

1. Eine Verknüpfung von Aussagen, die für sämtliche Kombinationen von Wahrheitswerten stets eine wahre Aussage ergibt, heißt **Tautologie**.
2. Eine Verknüpfung von Aussagen, die für sämtliche Kombinationen von Wahrheitswerten stets eine falsche Aussage ergibt, heißt **Kontradiktion**.

Beispiel:

Die ersten beiden der folgenden Verknüpfungen sind Tautologien, die letzte ist eine Kontradiktion.

1. $$\Big((A \Rightarrow B) \wedge \neg B\Big) \;\Rightarrow\; \neg A$$
2. $$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$$
3. $$A \wedge \neg A$$

Beispiel I für eine Tautologie.

Die Verknüpfung

$$\Big((A \Rightarrow B) \wedge \neg B\Big) \ \Rightarrow \ \neg A$$

ist eine Tautologie.

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(\neg B)$	$w((A \Rightarrow B) \wedge \neg B)$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

$w(A)$	$w(B)$	$w((A \Rightarrow B) \wedge \neg B)$	$w(\neg A)$	$w((A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1

Beispiel II für eine Tautologie.

Die Verknüpfung

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$$

ist eine Tautologie.

Wahrheitswertetafel.

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg(A \vee B))$	$w(\neg A \wedge \neg B)$	$w(\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B)$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	1	1

Beispiele für Aussagen, die von Variablen abhängen

Heute regnet es in Hamburg.

1. Nicht entscheidbar ob wahr oder falsch.
2. Spezieller an einem Ort x zu einem Zeitpunkt t. Es regnet zum Zeitpunkt t am Punkt x.
3. Obiger Satz könnte bedeuten:
    1. Heute regnet es zu allen Zeitpunkten überall in Hamburg.
    2. Heute gibt es einen Zeitpunkt t und einen Ort x in Hamburg, so dass es zum Zeitpunkt t im Punkt x regnet.
    3. Experimentieren Sie sprachlich mit den Elementen des Satzes: es gibt einen Zeitpunkt, zu allen Zeitpunkten, bzw. es gibt einen Ort und an allen Orten und überlegen Sie sich, was der Satz bedeutet, und welche dieser Aussagen welche anderen nach sich ziehen.

Definition und Beispiele für Aussageformen.

Definition:
Ein Aussage, die von Variablen abhängt, heißt **Aussageform**.

Beispiele für Aussageformen.

1. x ist eine gerade Zahl.
2. x ist größer als y.
3. x ist größer als y und y ist größer als z

Wahrheitswerte erhält man nur durch Einsetzen von Variablen

Beispiel:
Wir definieren eine Aussageform als

$$A(x, y) :\Leftrightarrow x^2 + y^2 < 4$$

1. $A(1/2, 1)$ ist wahr, d.h. $w(A(1/2, 1) = 1$,
2. $A(-3, 2)$ ist falsch, d.h. $w(A(-3, 2)) = 0$.

Quantoren.

Mathematische Aussagen werden häufig durch Kombination von Aussageformen mit Quantoren formuliert. Es gibt zwei Grundquantoren:

$\forall$ Allquantor $\qquad$ $\exists$ Existenzquantor

sowie den Quantor

$\exists_1$ Existenz mit Eindeutigkeit

Sei $A(x)$ eine Aussageform. Wir definieren neue Aussagen wie folgt.

1. $\forall\, x : A(x)$, d.h. für alle x gilt $A(x)$.
2. $\exists\, x : A(x)$, d.h. es gibt mindestens ein x, für das $A(x)$ gilt.
3. $\exists_1\, x : A(x)$, d.h. es gibt genau ein x, für das $A(x)$ gilt.

Negation von Quantoren.

Die Wahrheitswerte der Aussagen werden entsprechend definiert.

$$w(\forall\, x : A(x)) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{für alle } x \text{ ist } w(A(x)) = 1.$$

$$w(\exists\, x : A(x)) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{es gibt mindestens ein } x \text{ mit } w(A(x)) = 1.$$

$$w(\exists_1\, x : A(x)) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{es gibt genau ein } x \text{ mit } w(A(x)) = 1.$$

Negation von Quantoren:

$$\neg\Big(\forall\, x : A(x)\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, x : \Big(\neg A(x)\Big)$$

$$\neg\Big(\exists\, x : A(x)\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x : \Big(\neg A(x)\Big)$$

Ein Beispiel und Aufgaben zum Einsatz von Quantoren.

Beispiel und Aufgaben:

1. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in D :\Leftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \ \exists\, \delta > 0 : \ \forall\, x \in D :$$

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$\Big(\ (\varepsilon, \delta)$–Definition der Stetigkeit $\Big)$

2. Man verneine die Aussage

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \ \forall\, \varepsilon > 0 : \ \exists\, n \in \mathbb{N} : \ x - \varepsilon < n < x + \varepsilon$$

3. Negation des Stetigkeitsbegriffs

$$\neg \Big(\forall\, \varepsilon > 0 : \ \exists\, \delta > 0 : \ \forall\, x \in D :$$

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Big)$$

Mathematische Sätze und Beweistechniken.

Standardform eines Satzes: aus A folgt B, also

$$A \;\Rightarrow\; B \quad \text{für Aussagen } A, B,$$

wobei A Voraussetzung (Prämisse) und B Behauptung (Konklusion) heißt.

Mögliche Beweistechniken:

1. Direkter Beweis (Kettenschluss)

$$A = A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n = B$$

2. Indirekter Beweis (Kontraposition, Widerspruch)

$$A \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \neg B \Rightarrow \neg A$$

ist eine Tautologie.

Exemplarisches Beispiel für Satz und Beweis: Begriffsbildung.

Wichtig sind dabei präzise Begriffsbildungen.

Definition.
Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt gerade, falls es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = 2k$, andernfalls heißt n ungerade.

Bemerkung. Man überlegt sich leicht:

1. $$\forall n \in \mathbb{N} : n \text{ ist gerade} \vee n \text{ ist ungerade.}$$
2. Es gibt keine Zahl $n \in \mathbb{N}$, die sowohl gerade, wie auch ungerade ist.
3. Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist ungerade genau dann, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = 2k - 1$.

Exemplarisches Beispiel für Satz mit Beweis: Aussage und Beweisplan

Satz.

Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann gerade, wenn ihr Quadrat n^2 gerade ist, d.h. für $n \in \mathbb{N}$ gilt die Äquivalenz

$$n \text{ gerade} \iff n^2 \text{ gerade}.$$

Beweis.

Wir führen den Beweis in zwei Schritten. 1. Schritt: Zeige die Implikation

$$n \text{ gerade} \implies n^2 \text{ gerade}.$$

2. Schritt: Zeige die Implikation

$$n^2 \text{ gerade} \implies n \text{ gerade}.$$

Beweis: n gerade $\iff$ n^2 gerade.

1. Schritt: Direkter Beweis.

Sei n gerade. Dann $\exists k \in \mathbb{N} \; : \; n = 2k$

$$n = 2k \;\Rightarrow\; n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \;\Rightarrow\; n^2 \text{ gerade}$$

2. Schritt: Indirekter Beweis. (Zeige $\neg B \Rightarrow \neg A$ statt $A \Rightarrow B$)

Sei n^2 gerade. Angenommen n ist ungerade. Dann $\exists k \in \mathbb{N} \; : \; n = 2k - 1$

$$n = 2k - 1 \quad\Longrightarrow\quad n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k) + 1$$

$$\Longrightarrow\quad n^2 \text{ ist ungerade}$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu unserer Annahme, dass n^2 gerade ist.

Quadrate rationaler Zahlen sind niemals 2.

Satz:
Es gibt keine rationale Zahl $r = \frac{n}{m}$, so dass $r^2 = 2$.

Beweis: (durch Widerspruch)
Annahme: Es gibt teilerfremde $n, m \in \mathbb{N}$ mit $2 = n^2/m^2$.
Dann gilt

$$2m^2 = n^2 \Rightarrow n^2 \text{ gerade} \Rightarrow n \text{ gerade} \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N} : n = 2k$$

Einsetzen in $2m^2 = n^2$ ergibt

$$2m^2 = n^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Rightarrow m^2 = 2k^2 \Rightarrow m^2 \text{ gerade} \Rightarrow m \text{ gerade}$$

Widerspruch zur Annahme, dass n und m teilerfremd sind.

Die Annahme $2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2$ ist also **falsch** $\Rightarrow$ und Quadrate rationaler Zahlen ergeben niemals 2!

1.2. Mengen

Definition:
Eine Menge ist eine Kollektion von paarweise verschiedenen Objekten. Die einzelnen Objekte werden Elemente der Menge genannt.

Beispiele für Mengen.

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ Menge der natürlichen Zahlen.
2. $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ Menge der nicht–negativen ganzen Zahlen.
3. Menge der Primzahlen.

Notationen: Sei M eine Menge.

$$a \in M \quad \Longleftrightarrow \quad a \text{ ist ein Element der Menge } M$$

$$a \notin M \quad \Longleftrightarrow \quad \neg\,(a \in M)$$

Definition von Mengen.

1. Aufzählung der Elemente $M := \{1, 2, 3, 4\}$.
2. Charakterisierende Eigenschaft der Menge, $M := \{x \in \Omega \,|\, A(x)\}$.

Bedeutung der verwendeten Symbole.

:=	"wird definiert durch"
A(x)	Aussageform, definiert für Elemente aus dem Grundbereich Ω

Teilmengen von Mengen.

$$M \subset N \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \;:\; (x \in M \Rightarrow x \in N)$$

Gleichheit von Mengen.

$$M = N \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \;:\; (x \in M \Leftrightarrow x \in N)$$

Leere Menge. Menge, die kein Element enthält. Bezeichnung: $\emptyset$
Charakteristische Eigenschaft von $\emptyset$: Für jede Menge M gilt: $\emptyset \subset M$.

Ordnungseigenschaften.

1. $M \subset M$
2. $M \subset N \wedge N \subset M \quad \Rightarrow \quad M = N$
3. $M \subset N \wedge N \subset P \quad \Rightarrow \quad M \subset P$

Verknüpfung von Mengen.

$$
\begin{array}{lcll}
M \cup N & := & \{x \,|\, x \in M \vee x \in N\} & \text{(Vereinigung)} \\
M \cap N & := & \{x \,|\, x \in M \wedge x \in N\} & \text{(Durchschnitt)} \\
M \setminus N & := & \{x \,|\, x \in M \wedge x \notin N\} & \text{(Differenz)} \\
M \times N & := & \{(a,b) \,|\, a \in M \wedge b \in N\} & \text{(Cartesisches Produkt)} \\
\mathcal{P}(M) & := & \{X \,|\, X \subset M\} & \text{(Potenzmenge)}
\end{array}
$$