Taylor–Entwicklung der Exponentialfunktion.

Betrachte die Exponentialfunktion $f(x) = \exp(x)$. Zunächst gilt:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x)$$

Um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ergibt sich daher die Darstellung

$$\begin{aligned} \exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x;0) \\ R_n(x;0) &= \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \xi = \theta x, \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

Daraus bekommt man für $0 \le x \le 1$ die Fehlerabschätzung

$$|R_n(x;x_0)| = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \le \frac{e}{(n+1)!}$$

Beispiel: Für $n = 10$ erhält man $|R_{10}(x;x_0)| \le 6.81 \cdot 10^{-8}$.

Taylor–Entwicklung der Sinusfunktion.

Betrachte die Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$. Zunächst gilt:

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x) \text{ und } \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$$

Um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ergibt sich daher die Darstellung

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x;0)$$

mit dem Lagrange–Restglied

$$R_{2n+2}(x;0) = (-1)^{n+1}\frac{\cos\xi}{(2n+3)!}x^{2n+3}, \quad \xi = \theta x, \quad 0 < \theta < 1$$

Beispiel: Für $x \in [-\pi/6, \pi/6]$, $x \neq 0$ und $n = 3$ bekommt man

$$|R_8(x;0)| \le \frac{1}{9!} \cdot |x|^9 \le \frac{1}{9!} \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^9 \approx 8.1513 \cdot 10^{-9}$$

Bemerkungen zu Taylor–Reihen.

- Die Taylor–Reihe

$$T_\infty(x;x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

  einer $\mathcal{C}^\infty$–Funktion ist im Allgemeinen nicht konvergent.
- Falls die Taylor–Reihe $T_\infty(x;x_0)$ von f konvergiert, so konvergiert $T_\infty(x;x_0)$ nicht notwendigerweise gegen f.
- Falls jedoch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

  gilt, so nennt man die Funktion f reell analytisch oder $\mathcal{C}^\omega$–Funktion.

  Beispiele: $\exp(x)$, $\cos(x)$ und $\sin(x)$.

Folgerung aus dem Satz von Taylor.

Satz: Gilt für eine $\mathcal{C}^{n+1}$–Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

$$\forall\, x\in[a,b]:\ f^{(n+1)}(x) = 0,$$

so ist $f(x)$ ein Polynom höchstens n–ten Grades.

Beweis: Für das Lagrange–Restglied gilt

$$R_n(x;x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0$$

und somit

$$f(x) = T_n(x;x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Beispiel: Taylor–Entwicklung für Polynome.

Ist die Funktion $f(x)$ selbst ein Polynom vom Grad n, also

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (a_n \neq 0)$$

so ist das Taylor–Polynom n–ten Grades zu einem beliebigen Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$T_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

identisch zu $f(x)$, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Damit ist das Taylor–Polynom $T_n(x; x_0)$ nur eine Umordnung von f bezüglich des Punktes x_0.

Anwendung: Konvergenz des Newton–Verfahrens.

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^2$–Funktion und $x^* \in (a, b)$ eine einfache Nullstelle dieser Funktion. Dann ist das Newton–Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

mit Startwerten x_0 in der Nähe von x^* quadratisch konvergent.

Beweis: Betrachte Taylor–Entwicklung zweiter Ordnung um $x_n \in [a, b]$,

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(x - x_n)^2$$

woraus für $x = x^*$ mit $f(x^*) = 0$ und $f'(x^*) \neq 0$ folgt

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = (x^* - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}\,(x_n - x^*)^2$$

und somit

$$(x_{n+1} - x^*) = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}\,(x_n - x^*)^2$$

Hinreichende Kriterien für lokale Extrema.

Satz:
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^2$–Funktion mit $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$.

a) Falls $f'' > 0$, dann hat f in x_0 ein strenges lokales Minimum.

b) Falls $f'' < 0$, dann hat f in x_0 ein strenges lokales Maximum.

Beweis: Mit der Lagrange–Restgliedformel gilt die Darstellung

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2$$

für ein ξ mit $|\xi - x_0| < |x - x_0|$.
Da f'' stetig ist, ist f'' in einer Umgebung von x_0 strikt positiv, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 : \ f''(x) > 0 \ \text{ für alle } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

In diesem Fall besitzt f in x_0 ein strenges lokales Minimum.

Hinreichende Kriterien für lokale Extrema.

Problem: Was passiert im Fall $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$?
Hier gibt es zwei Möglichkeiten

1) Der stationäre Punkt ist ein strenges lokales Extremum.

2) Der stationäre Punkt ist ein Wendepunkt.

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^{2n}$–Funktion mit

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{für } 1 \leq k \leq 2n - 1$$

für ein $x_0 \in (a, b)$.

a) Falls $f^{(2n)} > 0$, dann hat f in x_0 ein strenges lokales Minimum.

b) Falls $f^{(2n)} < 0$, dann hat f in x_0 ein strenges lokales Maximum.

Beweisidee: Mit der Lagrange–Restgliedformel gilt

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}(x - x_0)^{2n} \quad \text{für ein } \xi \text{ mit } |\xi - x_0| < |x - x_0|$$

Beispiel zu lokalen Extremwerten.

Betrachte die Funktion $f(x) = x^5 - x^4$ und berechne die Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 - 4x^3 \\ f''(x) &= 20x^3 - 12x^2 \\ f^{(3)}(x) &= 60x^2 - 24x \\ f^{(4)}(x) &= 120x - 24 \end{aligned}$$

Es gilt: $f'(x_0) = 0 \iff x_0 = 0 \vee x_0 = \frac{4}{5}$.

1) Der Punkt $x_0 = 0$ ist ein strenges lokales Maximum, denn

$$f''(0) = f^{(3)}(0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(4)}(0) = -24$$

2) Der Punkt $x_0 = 4/5$ ist ein strenges lokales Minimum, denn

$$f''(4/5) = \frac{16}{25}(20 \cdot \frac{4}{5} - 12) = 64/25 > 0$$

Konvexe und konkave Funktionen.

Definition:
Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt konvex (oder eine Linkskurve), falls für alle $x_1 < x < x_2$ in $[a, b]$ gilt

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1))$$

Die Funktion $f(x)$ heißt konkav (oder eine Rechtskurve), falls für alle $x_1 < x < x_2$ in $[a, b]$ gilt

$$f(x) \geq f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1))$$

Gelten die Ungleichungen jeweils strikt, d.h. mit $<$ bzw. $>$, so nennt man die Funktionen streng konvex beziehungsweise streng konkav.

Interpretation und Kriterien.

Interpretation: Eine Funktion heißt konvex, falls gilt

$$f(x) \leq g(x) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1))$$

Die Funktion $g(x)$ ist linear (also eine "Gerade") mit

$$g(x_1) = f(x_1) \quad \text{und} \quad g(x_2) = f(x_2)$$

und die Funktionswerte von $f(x)$ liegen unterhalb der Geraden.

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^2$–Funktion. Dann gilt:

$$\begin{array}{lcl} f''(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in (a, b) & \Leftrightarrow & f \text{ ist konvex} \\ f''(x) > 0 \text{ für alle } x \in (a, b) & \Rightarrow & f \text{ ist streng konvex} \\ f''(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in (a, b) & \Leftrightarrow & f \text{ ist konkav} \\ f''(x) < 0 \text{ für alle } x \in (a, b) & \Rightarrow & f \text{ ist streng konkav} \end{array}$$

Wendepunkte.

Definition: Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in (a, b)$ einen Wendepunkt, falls eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist.

- $f(x)$ ist für ein $\varepsilon > 0$ in $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ konvex und konkav in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ (Links–Rechtskurve)
- $f(x)$ ist für ein $\varepsilon > 0$ in $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ konkav und konvex in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ (Rechts–Linkskurve)

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^3$–Funktion.

1) **Notwendiges Kriterium:** Ist $x_0 \in (a, b)$ ein Wendepunkt, so gilt: $f''(x_0) = 0$
2) **Hinreichende Kriterien:**
   Gilt $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) > 0$, so ist x_0 ein Wendepunkt von f mit Rechts–Linkskurve.

   Gilt $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) < 0$, so ist x_0 ein Wendepunkt von f mit Links–Rechtskurve.