Kapitel 5. Weiterer Ausbau der Differentialrechnung

5.1. Extremwerte, Mittelwertsätze, Satz von Taylor

Definition: Sei V ein normierter Vektorraum und $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset V$, eine Funktion. Dann hat die Funktion f in $x_0 \in D$

1) ein globales Maximum, falls $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in D$.
2) ein strenges globales Maximum, falls $f(x) < f(x_0)$ für alle $x \in D \setminus \{x_0\}$.
3) ein lokales Maximum, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit:

$$\forall\, x \in D : \quad \|x - x_0\| < \varepsilon \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(x_0)$$

4) ein strenges lokales Maximum, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit:

$$\forall\, x \in D : \quad 0 < \|x - x_0\| < \varepsilon \;\Rightarrow\; f(x) < f(x_0)$$

Analoge Definitionen gelten für minimale Funktionswerte (Extremwerte).

Notwendige Kriterien für lokale Extrema.

Satz: Besitzt $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum und ist $f(x)$ in x_0 differenzierbar, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Falls x_0 Randpunkt von $[a, b]$ (d.h. $x = a$ oder $x = b$), so gilt:

1. $f'(x_0) \leq 0$ ($f'(x_0) \geq 0$) für ein lokales Maximum (Minimum) in $x_0 = a$,
2. $f'(x_0) \geq 0$ ($f'(x_0) \leq 0$) für ein lokales Maximum (Minimum) in $x_0 = b$.

Beweis: Sei $x_0 \in [a, b]$ ein lokales Maximum von f. Dann gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \leq 0 & : \quad x_0 < x \geq \min(x_0 + \varepsilon, b) \\ \geq 0 & : \quad \max(x_0 - \varepsilon, a) \leq x < x_0 \end{cases}$$

und daher $f'(x_0^-) \geq 0$ und $f'(x_0^+) \leq 0$. Für $x_0 \in (a, b)$ folgt somit $f'(x_0) = 0$.

Definition: Ein Punkt x_0 mit $f'(x_0) = 0$ heißt stationärer Punkt von f.

Ein Beispiel zu Extremwerten.

Betrachte die Funktion $f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$ auf dem Intervall $[-1,1]$. Es gilt

$$f'(x) = \frac{2x-3x^3}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

- Stationäre Punkte: $2x - 3x^3 = 0$ gilt nur für $x \in \{-\sqrt{2/3}, 0, \sqrt{2/3}\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & : \quad -1 < x < -\sqrt{2/3} \\ < 0 & : \quad -\sqrt{2/3} < x < 0 \\ > 0 & : \quad 0 < x < \sqrt{2/3} \\ < 0 & : \quad \sqrt{2/3} < x < 1 \end{cases}$$

- Globale Minima bei $x = \pm 1$ und $x = 0$ mit Funktionswert $f(x) = 0$.
- Globale Maxima bei $x = \pm\sqrt{2/3}$ mit Funktionswert $f(x) = 2/(3\sqrt{3})$.

Mittelwertsätze.

a) Satz von Rolle
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b), so gilt:

$$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad \exists\, x_0 \in (a,b) \; : \; f'(x_0) = 0$$

b) Erster Mittelwertsatz
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b), so gilt:

$$\exists\, x_0 \in (a,b) : \qquad f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

c) Zweiter Mittelwertsatz
Sind die Funktionen f, g stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b) und gilt $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$, so gilt:

$$\exists\, x_0 \in (a,b) : \qquad \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Beweise der Mittelwertsätze I.

a) Satz von Rolle
Da f auf dem Kompaktum $[a,b]$ stetig ist, nimmt f auf $[a,b]$ Minimum und Maximum an.

Fall 1: Liegen diese beiden Extrema am Rand des Intervalls $[a,b]$, so ist f konstant, woraus $f'(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$ folgt.

Fall 2: Anderenfalls liegt ein Extremum x_0 in (a,b), woraus $f'(x_0) = 0$ folgt.

b) Erster Mittelwertsatz
Die Funktion

$$h(x) = f(x) - \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a))$$

erfüllt die Voraussetzungen vom Satz von Rolle, $h(a) = f(a) = h(b)$. Somit gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ mit

$$0 = h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{1}{b-a}(f(b) - f(a))$$

Beweise der Mittelwertsätze II.

c) Zweiter Mittelwertsatz
Wegen $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$, gilt $g(b) \neq g(a)$. Somit erfüllt die Funktion

$$h(x) = f(x) - g(x) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

die Voraussetzungen des Satzes von Rolle, denn es gilt

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - g(a)\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)} \\ &= f(b) - g(b)\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = h(b). \end{aligned}$$

Somit gibt es $x_0 \in (a,b)$ mit

$$0 = h'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Folgerungen aus den Mittelwertsätzen.

Monotone Funktionen:
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $I \subset \mathbb{R}$ (Intervall). Dann gilt:

$$
\begin{array}{lcl}
f'(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in I & \Leftrightarrow & f(x) \text{ monoton wachsend} \\
f'(x) > 0 \text{ für alle } x \in I & \Rightarrow & f(x) \text{ streng monoton wachsend} \\
f'(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in I & \Leftrightarrow & f(x) \text{ monoton fallend} \\
f'(x) < 0 \text{ für alle } x \in I & \Rightarrow & f(x) \text{ streng monoton fallend}
\end{array}
$$

Beispiel: Betrachte $f(x) = x - \ln(x+1)$ für $x \in (-1, \infty)$. Wegen

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

ist f streng monoton fallend auf $(-1, 0)$, streng monoton wachsend auf $(0, \infty)$.

Die Landau–Symbole.

Definition: Für eine Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $0 \in D \cap D'$, und $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ sagt man:

$$\varphi(h) = o(h^k) \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h)}{h^k} = 0$$

$$\varphi(h) = O(h^k) \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, C, \varepsilon > 0 : \ \forall\, 0 < |h| < \varepsilon : \ \left| \frac{\varphi(h)}{h^k} \right| \leq C$$

Bedeutung:
$\varphi(h) = o(h^k)$: $\varphi(h)$ konvergiert für $h \to 0$ schneller gegen Null als h^k.
$\varphi(h) = O(h^k)$: $\varphi(h)$ konvergiert für $h \to 0$ mindestens so schnell gegen Null wie h^k.

Beispiel: Ist f differenzierbar in x_0, so gilt:

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0)$$

Taylor–Entwicklungen und Taylor–Polynome.

Ausgangsfrage: Wie kann man $f(x)$ in der Nähe von x_0 approximieren?

Nullte Antwort: $f(x) \approx f(x_0)$ für $x \approx x_0$.

Erste Antwort: Ist f differenzierbar, so gilt

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\textbf{Polynom vom Grad 1}} + o(x - x_0)$$

Zweite Antwort: Ist f zweimal differenzierbar, so gilt

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2}}_{\textbf{Polynom vom Grad 2}} + o\left((x - x_0)^2\right)$$

Denn es gilt $f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$ und eine Integration über $[x_0, x]$ liefert die zweite Antwort.

Satz von Taylor.

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^n$–Funktion und $x_0 \in (a, b)$.

Dann gilt:

$$f(x) = T_n(x; x_0) + o\left((x - x_0)^n\right)$$

Dabei lautet das (eindeutig bestimmte) Taylor–Polynom

$$T_n(x; x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Den Punkt x_0 nennt man den Entwicklungspunkt.

Ist f eine C^{n+1}–Funktion, so gilt die Lagrange–Restgliedformel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x; x_0) \\ R_n(x; x_0) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad \text{für ein } \xi \text{ mit } |\xi - x_0| < |x - x_0| \end{aligned}$$

Zur Form des Taylorschen Polynoms.

Ziel: Approximiere f durch ein Polynom der Form

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$$

Forderungen: $f^{(j)}(x_0) = T^{(j)}(x_0)$ für $j = 0, 1, \dots, n$.
Beachte: Für die j–te Ableitung von $T(x)$ gilt

$$T^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{n} a_k k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-j+1)(x-x_0)^{k-j}$$

und weiterhin $T^{(j)}(x_0) = a_j \cdot j! = f^{(j)}(x_0)$ mit der obigen Forderung.
Somit gilt

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = T_n(x; x_0)$$

Restgliedformeln für das Taylorsche Polynom.

Ausgangspunkt. Mit Taylorschen Satz gilt $f(x) = T_n(x; x_0) + R_n(x; x_0)$.

1) Integraldarstellung

$$R_n(x; x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

2) Cauchy–Restgliedformel

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n$$

mit $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0, 1)$

3) Schlömilch–Restgliedformel

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{p\, n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^{n+1-p}$$

mit $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0, 1)$, $p \in \{1, 2, \dots, n+1\}$