4.2. Differentialrechnung einer Variablen

Zunächst:

Einleitung auf Folie bzw. an der Tafel

Sekantensteigung und Differenzenquotient

liefern im Grenzwert

Tangentensteigung und Ableitung

(Differentialquotient)

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in D \cap D'$ gegeben.

1) Für ein $x \in D$, $x \neq x_0$ nennt man den Ausdruck

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Differenzenquotient bzw. Sekantensteigung von f bezüglich x.

2) Die Funktion $f(x)$ heißt differenzierbar in x_0, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. In diesem Fall nennt man den Grenzwert Ableitung oder Differentialquotient der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 und schreibt

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Definition: (Fortsetzung)
Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in D \cap D'$ gegeben.

3) Dann heißen die einseitigen Grenzwerte

$$f'(x_0^+) := \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0^-) := \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

rechtsseitige bzw. linksseitige Ableitung von f bei x_0.

Bemerkung:
Falls f in x_0 differenzierbar ist, so stimmen die rechtsseitige und linksseitige Ableitung von f bei x_0 überein.

Eine Interpretation der Ableitung einer Funktion.

Die Bewegung eines Massenpunktes sei beschrieben durch eine Funktion

$$c : I \to \mathbb{R}^3, \quad c = c(t), \quad I \subset \mathbb{R}$$

wobei t die Zeit und $c(t)$ den Ort des Massenpunktes bezeichnet.

Dann ist die Ableitung

$$\dot{c}(t_0) := \frac{dc}{dt}(t_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}$$

die Geschwindigkeit, mit der sich der Massenpunkt bewegt.

In $\Delta t = t - t_0$ legt der Massenpunkt die Strecke $\Delta c = c(t) - c(t_0)$ zurück; die *mittlere Geschwindigkeit* beträgt

$$\frac{\Delta c}{\Delta t} = \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}$$

Beispiel: Ableitung von Monomen.

Betrachte die Monomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, für $n \in \mathbb{N}$.
Dann gilt

$$x^n - x_0^n = (x - x_0) \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} x_0^j$$

und somit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} x_0^j = n x_0^{n-1}$$

Fazit: Die Funktion $f(x) = x^n$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = n x^{n-1}, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

für die (erste) Ableitung von f.

Bemerkung: Für eine konstante Funktion $f(x) = c$ gilt $f'(x) = 0$.

Weitere Beispiele zur Ableitung von Funktionen.

Linearität der Ableitung.

Sind die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ differenzierbar, so sind auch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \qquad \text{und} \qquad (\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

differenzierbare Funktionen, und es gilt

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \qquad \text{und} \qquad (\lambda f)'(x) = \lambda \cdot f'(x)$$

Ableitung von Polynomen.

Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom, d.h. p hat die Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \qquad \text{mit Koeffizienten } a_k \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq n$$

Dann ist die (erste) Ableitung von p gegeben durch

$$\frac{d}{dx} p(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \right) = \sum_{k=1}^{n} a_k\, k\, x^{k-1}$$

Ableitungen einiger elementarer Funktionen.

Funktion	**Ableitung**	**Parameter**
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ableitung von vektorwertigen Funktionen.

Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}$, eine vektorwertige Funktion, d.h. f hat die Form

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))^T \in \mathbb{R}^m, \quad \text{für } x \in D.$$

Dann wird die Ableitung von f *komponentenweise* berechnet, d.h. es gilt

$$f'(x) = (f_1'(x), \ldots, f_m'(x))^T \in \mathbb{R}^m, \quad \text{für } x \in D.$$

Beispiele:

$$f(x) = (x, e^x, \sin x)^T \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (1, e^x, \cos x)^T$$

$$f(x) = (\cos x, \sin x)^T \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (-\sin x, \cos x)^T$$

Aus Differenzierbarkeit folgt Stetigkeit.

Satz: Ist $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, in $x_0 \in D^0$ differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.
Beweis: Sei f in x_0 differenzierbar. Dann folgt

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0)) = 0$$

unmittelbar aus der Voraussetzung

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Wegen $\lim_{x \to x_0}(x - x_0)f'(x_0) = 0$ folgt schließlich

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

d.h. die Funktion f ist in x_0 stetig.

Wichtige Differentationsregeln.

Satz: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, in $x_0 \in D^0$ differenzierbare Funktionen. Dann gelten die folgenden Differentiationsregeln.

a) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ in x_0 differenzierbar, und es gilt

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

b) Die Funktion $f \cdot g$ ist in x_0 differenzierbar, und es gilt die Produktregel

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

c) Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist die Funktion $f(x)/g(x)$ in x_0 differenzierbar, und es gilt die Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Weitere wichtige Differentationsregeln.

Satz:

a) Seien $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ mit $D, E \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in D^0 \cap (f^{-1}(E))^0$. Falls f differenzierbar in x_0 und g differenzierbar in $f(x_0)$, so ist auch die Komposition $g \circ f$ in x_0 differenzierbar, und es gilt die Kettenregel:
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

b) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und in $x_0 \in [a, b]$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ in $f(x_0)$ differenzierbar, und es gilt:
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad (y_0 = f(x_0))$$

c) Ist $(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform, und sind $f, g : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}$, in $x_0 \in D^0$ differenzierbar, so ist auch die Funktion (f, g) in x_0 differenzierbar, und es gilt die verallgemeinerte Produktregel
$$\frac{d}{dx}(f(x), g(x))|_{x=x_0} = (f'(x_0), g(x_0)) + (f(x_0), g'(x_0))$$

Ableitungen höherer Ordnung.

1. Ist eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt $x_0 \in [a, b]$ differenzierbar, so ist die Ableitung von f ebenso eine Funktion, $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$.
2. Ist $f'(x)$ überall differenzierbar, so erhält man die zweite Ableitung $f''(x)$ von f, usw.
3. Ist $f(x)$ n–mal differenzierbar auf $[a, b]$ und ist zudem die n–te Ableitung $f^{(n)}(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ stetig, so heißt die Funktion $f(x)$ n–mal stetig differenzierbar oder auch $\mathcal{C}^n$–Funktion bzw. $f \in \mathcal{C}^n([a, b])$.
4. Ist $f(x)$ n–mal differenzierbar auf $[a, b]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so heißt f beliebig oft differenzierbar (unendlich oft differenzierbar) oder auch $\mathcal{C}^\infty$–Funktion bzw. $f \in \mathcal{C}^\infty([a, b])$.
5. Ist $f(x)$ auf $[a, b]$ nur stetig, so heißt f C^0–Funktion bzw. $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$.