ε–δ–Definition der Stetigkeit.

Satz: (ε–δ–Definition)

Für $x_0 \in D \cap D'$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

a) $f(x)$ ist stetig in x_0, d.h. es gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

b) $\forall \varepsilon > 0 : \; \exists \delta > 0 : \; \forall x \in D :$

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

Beweisidee:

Für die Richtung a) $\Rightarrow$ b) führen wir einen Widerspruchsbeweis.

Für die Richtung b) $\Rightarrow$ a) machen wir einen direkten Beweis.

ε–δ–Definition der Stetigkeit.

Beweis a) $\Rightarrow$ b): Annahme: $\exists \varepsilon > 0 : \; \forall \delta > 0 : \; \exists x_\delta \in D :$

$$\|x_\delta - x_0\| < \delta \quad \wedge \quad \|f(x_\delta - f(x_0)\| \geq \varepsilon$$

Die Wahl $\delta = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ generiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in D$ mit

$$\|x_n - x_0\| < \frac{1}{n} \quad \wedge \quad \|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$$

Wegen $\|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$ gilt

$$x_n \neq x_0 \quad \Longrightarrow \quad x_n \in D \setminus \{x_0\}$$

sowie

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$$

Gleichzeitig konvergiert aber $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gegen $f(x_0) \Rightarrow$ Widerspruch.

ε–δ–Definition der Stetigkeit.

Beweis b) $\Rightarrow$ a): Es gelte

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad x_n \in D \setminus \{x_0\}$$

Wähle zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\forall\, x \in D \;:\; \|x - x_0\| < \delta \quad\Longrightarrow\quad \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

Sei nun $N = N(\varepsilon)$ mit

$$\forall\, n \geq N \;:\; \|x_n - x_0\| < \delta$$

Dann folgt direkt

$$\forall\, n \geq N \;:\; \|f(x_n) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Beispiele stetiger Funktionen.

- Konstante Funktionen $f : D \to W$, $f(x) = a \in W$ sind stetig.
- Die Identität $\mathrm{id} : V \to V$, definiert durch $\mathrm{id}(v) = v$ für alle $v \in V$, ist stetig.
- Univariate Polynome, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$), der Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad a_k \in \mathbb{R} \text{ (oder } a_k \in \mathbb{C})$$

sind stetig.

- Multivariate Polynome, d.h. Polynome in n reellen (oder komplexen) Variablen, $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (oder $p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$), der Form

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{m_1} \ldots \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1,\ldots,k_n} \cdot x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$$

sind stetig.

Weitere Beispiele stetiger Funktionen.

- Die Wurzelfunktion $\sqrt[m]{x} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig auf $[0, \infty)$.
- Eine Potenzreihe, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$), der Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

  ist auf dem Bereich, auf dem die Reihe absolut konvergiert, stetig.
- Sind die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ stetig im Punkt x_0, so auch

$$f(x) + g(x), \quad \lambda \cdot f(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x_0) \neq 0).$$

- Die Komposition stetiger Funktionen ist wieder eine stetige Funktion.

  Beispiel: $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$ ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig.

Eigenschaften stetiger Funktionen.

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Dann gilt

a) Existenz einer Nullstelle.

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, x_0 \in (a, b) : \; f(x_0) = 0$$

a) Zwischenwertsatz.

$$f(a) < c < f(b) \quad \Longrightarrow \quad \exists\, x_0 \in (a, b) : \; f(x_0) = c$$

c) Stetigkeit der Umkehrfunktion. Ist $f(x)$ streng monoton wachsend, d.h. mit $x < y$ folgt $f(x) < f(y)$, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend.

d) Min–Max–Eigenschaft. Die Funktion f nimmt ihr Minimum und Maximum auf $[a, b]$ an, d.h. es gibt $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit

$$f(x_1) = \min_{x \in [a,b]} f(x) \qquad f(x_2) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

Eigenschaften stetiger Funktionen.

Wichtige Bemerkung:
Für die Gültigkeit der Min–Max–Eigenschaft ist es wesentlich, dass man ein kompaktes (d.h. abgeschlossenes und beschränktes) Intervall $[a, b]$ betrachtet.

Sonst gilt die Aussage im Allgemeinen nicht!!!

Gegenbeispiel:
Betrachte die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D = (0, \infty) \subset \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{für } x \in D = (0, \infty)$$

Es gilt

$$D' = [0, \infty), \qquad D \cap D' = (0, \infty)$$

Die Funktion ist auf ganz D stetig, nimmt aber weder Minimum noch Maximum auf D an.

Min–Max–Eigenschaft für multivariate Funktionen.

Definition: Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt kompakt (folgenkompakt), falls jede Folge $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $\mathbf{x}_k \in D$, eine **in der Menge** D konvergente Teilfolge

$$\mathbf{x}_{k_j} \to \mathbf{x}_0 \in D \quad (j \to \infty)$$

besitzt.

Satz: Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ stetig auf D, so nimmt f auf D Minimum und Maximum an, d.h. es gibt Punkte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$ mit

$$f(\mathbf{x}_1) = \min_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}) \qquad f(\mathbf{x}_2) = \max_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x})$$

Merkregel:

Eine stetige Funktion nimmt auf einem Kompaktum ihr Minimum und Maximum an.

Kriterien für Kompaktheit.

Satz: Für eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

a) D ist kompakt.

b) D ist abgeschlossen und beschränkt.

c) Heine–Borel–Überdeckung. Jede offene Überdeckung von D besitzt eine **endliche** Teilüberdeckung, d.h. es gilt

$$D \subset \bigcup_{i \in I} U_i, \quad U_i \text{ offen} \quad \Rightarrow \quad \exists\, i_1, \ldots, i_k \in I \;:\; D \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_{i_j}$$

Beispiel: Die Einheitssphäre S^{n-1} in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|$,

$$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\},$$

ist kompakt.

Gleichmäßige Stetigkeit.

Definition: Eine Funktion $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt gleichmäßig stetig, falls gilt: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \mathbf{x}, \mathbf{x_0} \in D$:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x_0})\| < \varepsilon$$

Satz:
Jede stetige Funktion auf einem Kompaktum D ist gleichmäßig stetig.

Bemerkung:
Ist $f : D \to \mathbb{R}^m$ gleichmäßig stetig auf D, so ist f stetig auf D.

Beispiele:

- $f(x) = 1/x$ ist stetig auf $(0, \infty)$, aber nicht gleichmäßig stetig auf $(0, \infty)$.
- $f(x) = \exp(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$, aber nicht gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.
- $f(x) = \sin(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ und sogar gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.