

Beispiele zur Konvergenzuntersuchung bei Reihen.

Beispiel: Wir untersuchen die Konvergenz der **Exponentialreihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

Anwendung des **Quotientenkriteriums** ergibt

$$\left| \frac{\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{z^k}{k!}} \right| = \left| \frac{z^{k+1} k!}{z^k (k+1)!} \right| = \frac{|z|}{k+1} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

Damit konvergiert die Reihe **für alle** $z \in \mathbb{C}$ (absolut).

Wir setzen

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$



Der Umordnungssatz für Reihen.

Sei $\sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine beliebige Bijektion (Permutation) auf \mathbb{N}_0 .

Ziel: Vergleiche die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k} \quad (\sigma_k = \sigma(k))$$

Satz:

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe, und sei $\sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine beliebige Permutation auf \mathbb{N}_0 .

Dann ist die umgeordnete Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$ ebenfalls absolut konvergent, und die Grenzwerte der beiden Reihen stimmen überein, d.h. es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$$



Multiplikation von Reihen.

Frage: Wie funktioniert das Ausmultiplizieren von Reihen?

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = ???$$

Produkt von endlichen Summen. Für **endliche** Summen gilt

$$(a_0 + \dots + a_m) \cdot (b_0 + \dots + b_n) = \left(\sum_{k=0}^m a_k\right) \left(\sum_{k=0}^n b_k\right) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n a_k b_l$$

Frage: Gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right) \stackrel{?}{=} \sum_{k,l=0}^{\infty} a_k b_l$$

Beachte: Jedes Indexpaar $(k, l) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ tritt **genau** einmal auf.



Multiplikation von Reihen.

Satz: Die Reihen $\sum_{l=0}^{\infty} a_l$ und $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ seien absolut konvergent. Weiterhin sei $\sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, k \mapsto (\sigma_1(k), \sigma_2(k))$ für $k \in \mathbb{N}_0$, eine **bijektive** Abbildung. Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)}$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)} = \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_l\right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right)$$

Beweis: Für $m \in \mathbb{N}_0$ und für hinreichend großes $N \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^m |a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)}| \leq \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N |a_k| |b_l| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} |b_l|\right) < \infty$$

Somit ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)}$ absolut konvergent, und ihr Grenzwert ist nach dem Umordnungssatz unabhängig von der Permutation $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$.



Multiplikation von Reihen.

Zur Berechnung des Grenzwertes wählt man eine spezielle Reihenfolge

$\sigma(k)$	0	1	2	3	...
0	0	3	8	15	...
1	1	2	7	14	...
2	4	5	6	13	...
3	9	10	11	12	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	

Für $m = (n + 1)^2 - 1$, mit $n \in \mathbb{N}_0$, bekommt man

$$\sum_{k=0}^m a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)} = (a_0 + a_1 + \dots + a_n)(b_0 + b_1 + \dots + b_n)$$

und somit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) \left(\sum_{l=0}^n b_l \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l \right)$$

Das Cauchy-Produkt von Reihen.

Weiterer Spezialfall: Nummerierung entlang der Diagonalen

$\sigma(k)$	0	1	2	3	...
0	0	2	5	9	...
1	1	4	8	13	...
2	3	7	12	18	...
3	6	11	17	24	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	

Man erhält damit das **Cauchy-Produkt** der (absolut konvergenten) Reihen:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots \end{aligned}$$

Anwendung des Cauchy-Produkts.

Für die **Exponentialfunktion**

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (z \in \mathbb{C})$$

gilt die **Funktionalgleichung**: $\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w)$.

Begründung: Die obige Reihe $\exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$ ist absolut konvergent. Damit folgt

$$\begin{aligned} \exp(z) \exp(w) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{w^l}{l!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z + w)^n = \exp(z + w) \end{aligned}$$



Kapitel 4. Stetigkeit und Differenzierbarkeit

4.1. Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

Im Folgenden betrachten wir für normierte Vektorräume V und W Funktionen $f : D \rightarrow W$ mit Definitionsbereich $D \subset V$.

Definition:

- Ein Punkt $x_0 \in V$ heißt **Häufungspunkt** von D , falls eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in D, \quad x_n \neq x_0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

- D' bezeichnet die Menge **aller Häufungspunkte** von D .
- $\bar{D} = D \cup D'$ bezeichnet den **topologischen Abschluss** von D .
- Die Menge D heißt **abgeschlossen**, falls $D' \subset D$, also $\bar{D} = D$ gilt.



4.1. Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

Definition:

- Zu $x_0 \in V$ und $\varepsilon > 0$ bezeichnet

$$K_\varepsilon(x_0) := \{x \in V \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

die (offene) Kugel um x_0 mit Radius ε . Die Menge

$$\overline{K_\varepsilon(x_0)} := \{x \in V \mid \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$$

heißt abgeschlossene Kugel um x_0 mit Radius ε .

- $D \subset V$ heißt beschränkt, falls es $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in V$ gibt mit $D \subset K_\varepsilon(x_0)$.
- $x_0 \in D$ heißt innerer Punkt von D , falls es $\varepsilon > 0$ gibt mit $K_\varepsilon(x_0) \subset D$.
- D^0 bezeichnet die Menge aller inneren Punkte von D .
- D heißt offen, falls $D^0 = D$ gilt.



Beispiele zur letzten Definition.

- Die Menge $D = [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen, aber nicht beschränkt.
- Für $D = (-\infty, 0) \cup \{1\} \cup (2, \infty) \subset \mathbb{R}$ gilt

$$D' = (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$$

$$\overline{D} = (-\infty, 0] \cup \{1\} \cup [2, \infty)$$

$$D^0 = (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$$

- Für $x_0 \in V$ ist die Menge $D = K_\varepsilon(x_0) \subset V$ offen, und es gilt $D' = \overline{K_\varepsilon(x_0)}$.
- Innere Punkte $x_0 \in D^0$ sind immer Häufungspunkte von D , denn

$$x_0 + \frac{\varepsilon}{n+1} \frac{z}{\|z\|} \rightarrow x_0, \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{für } z \in V \setminus \{0\}.$$



Grenzwerte von Funktionen.

Definition:

Gegeben sei eine Funktion $f : D \rightarrow W$, $D \subset V$ und ein $x_0 \in D'$.

- $f(x)$ **konvergiert** für $x \rightarrow x_0$ gegen den Grenzwert y_0 , falls für **jede** Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, mit $x_n \in D$ und $x_n \neq x_0$, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0$$

Man verwendet in diesem Fall die Notation $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$.

- Im Fall $D = \mathbb{R}$ lassen sich **einseitige** Grenzwerte wie folgt definieren.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = y_0 \quad :\Leftrightarrow \quad \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in D, x_n < x_0 :$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = y_0 \quad :\Leftrightarrow \quad \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in D, x_n > x_0 :$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0$$



Beispiele zu Grenzwerten von Funktionen.

Beispiel 1: Betrachte die Sprungfunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \wedge x = 1 \\ 1 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Für $x \rightarrow 0$ existiert der Grenzwert der Funktion nicht! Weiter gilt

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \neq f(1)$$

Beispiel 2: Für die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$ existiert weder der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ noch $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

Beispiel 3: Für die Funktion $f(x) = 1/x$ existieren die beiden einseitigen **uneigentlichen** Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



Grenzwertsätze für Funktionen.

Bemerkung: Grenzwertsätze für Folgen übertragen sich auf Funktionen.

- Für den Grenzwert einer **Summe von Funktionen** gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

- Für den Grenzwert eines **Produkts einer Funktion mit einem Skalar** gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f(x)) = \lambda \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

- Für **Produkte von reellwertigen (komplexwertigen) Funktionen** gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right)$$

- Für **vektorwertige Funktionen** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (oder \mathbb{C}^n) gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x), \dots, f_n(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x), \dots, \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right)$$



Stetige Funktionen.

Definition:

Sei $f : D \rightarrow W, D \subset V$ eine Funktion.

- 1) Die Funktion $f(x)$ heißt **stetig ergänzbar** in $x_0 \in D'$, falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ existiert und endlich ist.}$$

- 2) Die Funktion $f(x)$ heißt **stetig in** $x_0 \in D \cap D'$, falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

gilt.

- 3) Die Funktion $f(x)$ heißt **stetig**, falls $f(x)$ in **allen** Punkten $x_0 \in D \cap D'$ stetig ist.

