Einige Beispiele für Mengen im $\mathbb{R}^n$.

- Intervalle in $\mathbb{R}$. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

$$
\begin{array}{lcll}
[a,b] & := & \{x \mid a \le x \le b\} & \text{abgeschlossenes Intervall} \\
(a,b) & := & \{x \mid a < x < b\} & \text{offenes Intervall} \\
[a,b) & := & \{x \mid a \le x < b\} & \text{halboffenes Intervall} \\
(a,b] & := & \{x \mid a < x \le b\} & \text{halboffenes Intervall}
\end{array}
$$

- Querschnitt eines T–Trägers.

$$
\begin{aligned}
M &:= M_1 \cup M_2 \\
M_1 &:= \left[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right] \times [-\gamma, 0] \\
M_2 &:= \left[-\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right), \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)\right] \times [0, \delta]
\end{aligned}
$$

Kapitel 1. Aussagen, Mengen und Funktionen

1.3. Funktionen

Definition:
Seien M und N Mengen. Unter einer Funktion (oder einer Abbildung) von M nach N verstehen wir eine Vorschrift, die jedem Element $x \in M$ genau ein Element $y \in N$ zuordnet. Die Zuordnung $x \mapsto y$ ist also eindeutig.

Notationen und Bezeichnungen.

- $f : M \to N$, $y = f(x)$ bzw. $x \mapsto f(x)$ für alle $x \in M$. Somit gilt:

$$f : M \to N \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in M \; : \; \exists_1 \, y \in N \; : \; y = f(x)$$

- M nennt man Definitionsbereich (oder Urbildbereich) von f.
- N nennt man Zielmenge (oder Bildbereich) von f.
- Die Menge

$$\mathrm{graph(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in M\} \subset M \times N}$$

heißt Graph der Funktion f.

1.3. Funktionen

Sei $f : M \to N$ eine Funktion.

1. Zu $A \subset M$ heißt die Menge
$$f(A) = \{f(a) \in N \,|\, a \in M\} \subset N$$
das Bild von A unter der Funktion f.
2. Zu $B \subset N$ heißt die Menge
$$f^{-1}(B) = \{a \in M \,|\, f(a) \in B\} \subset M$$
das Urbild von B unter der Funktion f.

Für vorgegebene Mengen M und N und eine Funktion $f : M \to N$ definieren wir nun die Begriffe

surjektive, injektive und bijektive Funktionen.

Surjektive, injektive und bijektive Funktionen.

Definition:

Sei $f : M \to N$ eine Funktion von M nach N.

Die Funktion f heißt surjektiv, falls die Gleichung $y = f(x)$ für alle $y \in N$ mindestens eine Lösung $x \in M$ besitzt, d.h.

$$\forall\, y \in N \;:\; \exists\, x \in M \;:\; y = f(x)$$

Weiterhin heißt f injektiv, falls die Gleichung $y = f(x)$ für $y \in N$ höchstens eine Lösung $x \in M$ besitzt, d.h.

$$\forall\, x_1, x_2 \in M \;:\; (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

Schließlich heißt die Funktion f bijektiv, falls f surjektiv und injektiv ist.

Ein paar Beispiele auf der Folie ...

Surjektive, injektive und bijektive Funktionen.

Bemerkungen.

1. Eine injektive Funktion $f : M \longrightarrow N$ lässt sich invertieren, denn zu jedem $y \in f(M)$ existiert genau ein $x \in M$ mit $y = f(x)$.
2. Für eine injektive Funktion $f : M \longrightarrow N$ wird deren Umkehrfunktion $f^{-1} : f(M) \longrightarrow M$ definiert durch
$$f^{-1}(y) = x \quad \text{für } y \in f(M), \text{ wobei } f(x) = y.$$
3. Falls $f : M \longrightarrow N$ bijektiv ist, so gilt
$$f(M) = N \quad \text{und} \quad f^{-1}(N) = M$$
4. Die Umkehrfunktion einer reellwertigen injektiven Funktion einer reellen Variablen erhält man durch Spiegelung an der Diagonalen.

Ein paar Beispiele auf der Folie ...

Komposition von Funktionen.

Definition: Seien $f : M \longrightarrow N$ und $g : N \longrightarrow P$ Funktionen. Dann ist die Komposition $g \circ f$ von f und g eine Funktion definiert

$$g \circ f : M \longrightarrow P, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{für } x \in M$$

Wir erhalten also die Hintereinanderschaltung

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \quad \text{bzw.} \quad M \xrightarrow{g \circ f} P$$

Eigenschaften von Kompositionen.

1. Assoziativität. Es gilt
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$
2. Kompositionen sind in der Regel nicht kommutativ, d.h.
$$g \circ f \neq f \circ g$$

Beispiel: Kompositionen sind in der Regel nicht kommutativ.

Wir betrachten die beiden reellwertigen Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2x \\ g(x) &= x + 1 \end{aligned}$$

die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind.

Dann folgt

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(x^2 + 2x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \\ (f \circ g)(x) &= f(x + 1) = (x + 1)^2 + 2(x + 1) = x^2 + 4x + 3 \end{aligned}$$

und somit gilt $g \circ f \neq f \circ g$.

Die symmetrische Gruppe $S(M)$.

Definition: Sei M eine nichtleere Menge. Dann heißt die Menge

$$S(M) = \{f : M \to M \mid f \text{ bijektiv}\}$$

die symmetrische Gruppe der Menge M.

Insbesondere ist die Identität $\mathrm{id}_M : M \to M$, definiert durch $\mathrm{id}_M(x) = x$ für alle $x \in M$, ein Element von $S(M)$.

Die symmetrische Gruppe $S(M)$ erfüllt die Gruppenaxiome.

$$\begin{array}{llcll} \text{G1)} & h \circ (g \circ f) & = & (h \circ g) \circ f & \text{(Assoziativgesetz)} \\ \text{G2)} & f \circ id_M & = & id_M \circ f = f & \text{(neutrales Element)} \\ \text{G3)} & f \circ f^{-1} & = & f^{-1} \circ f = id_M & \text{(inverses Element)} \end{array}$$

Dabei bezeichnet f^{-1} die Umkehrfunktion von f.

Elementare reelle Funktionen I.

- **Affin–lineare Funktionen.**

$$f(x) = a_1 x + a_0, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

- **Polynome.**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$.

- Die **Exponentialfunktion** $f(x) = a^x$ zur Basis $a \in \mathbb{R}, a > 0$.

Spezialfall: Basis e, wobei die Eulersche Zahl e definiert ist durch

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2.718281828459045235\ldots$$

Es gilt die Funktionalgleichung

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad \text{für alle}\, x, y \in \mathbb{R}$$

Elementare reelle Funktionen II.

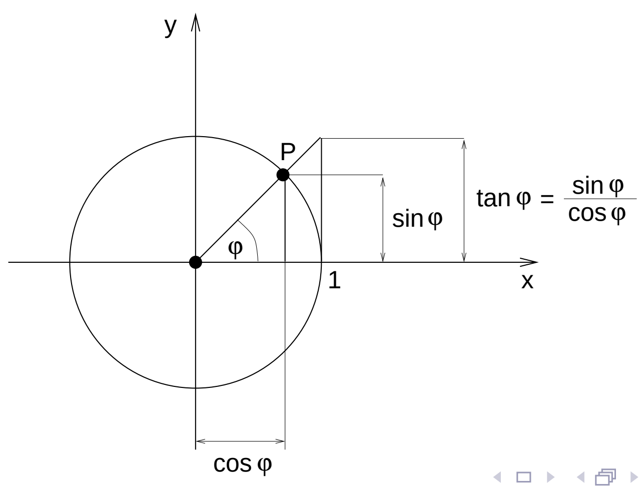
- Der **Logarithmus**: Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

$$f(x) = \log_a x : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad a > 0, a \neq 1$$

Spezialfall: Basis e ergibt den natürlichen Logarithmus.

$$\ln(x) = \log(x) = \log_e(x)$$

- **Trigonometrische Funktionen.**
Darstellung am Einheitskreis



Eigenschaften trigonometrischer Funktionen I.

- Wir definieren die trigonometrischen Funktionen über das Bogenmaß.

$$\sin, \cos : [0, 2\pi) \longrightarrow [-1, 1]$$

- Für alle $\varphi \in [0, 2\pi)$ gilt

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

- Periodizität: Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \sin(\varphi) &= \sin(\varphi + 2\pi) \\ \cos(\varphi) &= \cos(\varphi + 2\pi) \end{aligned}$$

somit sind Sinus und Cosinus auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

$$\sin, \cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$$

Eigenschaften trigonometrischer Funktionen II.

- Symmetrie: Für alle $\varphi \in [0, 2\pi)$ gilt

$$\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi), \quad \cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$$

- Wertetafel.

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin\varphi$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\varphi$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

- Additionstheoreme.

  Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

2.1. Natürliche Zahlen

Die Menge

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

der natürlichen Zahlen wird formal durch die Peano–Axiome definiert:

(A1) $1 \in \mathbb{N}$

(A2) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+1) \in \mathbb{N}$

(A3) $n \neq m \Rightarrow (n+1) \neq (m+1)$

(A4) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+1) \neq 1$

(A5) Für $A \subset \mathbb{N}$ gilt das Vollständigkeitsaxiom gilt :
$1 \in A \wedge (\forall n : [n \in A \Rightarrow (n+1) \in A]) \Rightarrow A = \mathbb{N}$

Bemerkung: Die Nachfolgeabbildung $n \longrightarrow (n+1)$ ist eine injektiv.

2.1. Natürliche Zahlen

Beweisprinzip der vollständigen Induktion.
Dabei ist die Gültigkeit einer Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen, d.h. es ist zu zeigen

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : A(n)$$

wobei $A(n)$ eine Aussageform ist, die von $n \in \mathbb{N}$ abhängt.

Beweisschritte der vollständigen Induktion.

(I1) Induktionsanfang: $n = 1$, d.h. zeige $A(1)$.

(I2) Induktionsannahme: Es gelte $A(n)$.

(I3) Induktionsschluss: $n \longrightarrow n+1$
Zeige die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Sind (I1)-(I3) durchführbar, so gilt die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 1 zur vollständigen Induktion I.

Bestimme die Anzahl t_n der Teilmengen einer Menge mit n Elementen,

$$A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

Vorgehen: Betrachte zunächst kleine $n \in \mathbb{N}$, z.B. $n = 1, 2, 3$.

1. $n = 1$:
   Die Menge $A_1 = \{a_1\}$ besitzt die Teilmengen $\emptyset, \{a_1\}$, d.h. $t_1 = 2$.
2. $n = 2$:
   Die Menge $A_2 = \{a_1, a_2\}$ besitzt die vier Teilmengen
   $$\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}$$
   und somit gilt $t_2 = 4$.
3. $n = 3$: Die Menge $A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$ besitzt $t_3 = 8$ Teilmengen.

Vermutung: Es gilt $t_n = 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 1 zur vollständigen Induktion II.

Satz: Eine n–elementige Menge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ besitzt 2^n Teilmengen.

Beweis: durch vollständige Induktion über n.

- Induktionsanfang ($n = 1$): Es gilt $t_1 = 2 = 2^1$.
- Induktionsannahme: Es gelte $t_n = 2^n$ für $n \in \mathbb{N}$.
- Induktionsschluss ($n \to n + 1$):

Zu zeigen: $A_{n+1} = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ hat 2^{n+1} Teilmengen.

Schreibe $\mathcal{P}(A_{n+1}) = K_1 \cup K_2$ für die Potenzmenge von A_{n+1}, wobei

$$\begin{aligned} T \in K_1 \quad &\Longleftrightarrow \quad a_{n+1} \notin T \\ T \in K_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad a_{n+1} \in T \end{aligned}$$

Nach Induktionsannahme besitzen K_1 und K_2 genau $t_n = 2^n$ Elemente.

Weiterhin gilt nach Konstruktion $K_1 \cap K_2 = \emptyset$.

Somit hat $\mathcal{P}(A_{n+1})$ insgesamt $t_{n+1} = t_n + t_n = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$ Elemente.

Beispiel 2 zur vollständigen Induktion I.

Bestimme die Anzahl p_n der verschiedenen Anordnungen (Permutationen) für die Elemente einer n–elementigen Menge $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$

Vorgehen: Betrachte zunächst kleine $n \in \mathbb{N}$, z.B. $n = 1, 2, 3$.

1. $n = 1$:
   Das Element in $A_1 = \{1\}$ besitzt nur eine Anordnung (1), d.h. $p_1 = 1$.
2. $n = 2$: Für die Elemente in $A_2 = \{1, 2\}$ gibt es zwei Anordnungen
   $$(1, 2), (2, 1).$$
   Somit gilt $p_2 = 2$.
3. $n = 3$: Für die Elemente in $A_3 = \{1, 2, 3\}$ gibt es sechs Anordnungen
   $$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).$$
   Somit gilt $p_3 = 6$.

Vermutung: Es gilt $p_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 2 zur vollständigen Induktion II.

Satz: Es gibt $p_n = n!$ Permutationen für das n–Tupel $(1, 2, \ldots, n)$.

Beweis: durch vollständige Induktion über n.

- Induktionsanfang ($n = 1$): Es gilt $p_1 = 1$.
- Induktionsannahme: Es gelte $p_n = n!$ für $n \in \mathbb{N}$.
- Induktionsschluss ($n \to n + 1$):

Es gibt nach Induktionsannahme je $n!$ Permutationen für die $(n + 1)$–Tupel

$$\left\{ \begin{array}{c} (i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n, n+1), \\ (i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, n+1, i_n), \\ \vdots \\ (i_1, n+1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n), \\ (n+1, i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n) \end{array} \right\} \quad \underbrace{i_1, \ldots, i_n}_{\text{paarweise verschieden}} \in \{1, \ldots, n\}$$

und somit gilt $p_{n+1} = \underbrace{n! + \ldots + n!}_{(n+1)-fach} = (n + 1) \cdot n! = (n + 1)!$.

Beispiel 2 zur vollständigen Induktion III.

Folgerung: Eine n–elementige Menge $\{a_1, \ldots, a_n\}$ besitzt genau

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}, \quad \text{für } n, m \in \mathbb{N}_0 : 0 \leq m \leq n$$

m–elementige Teilmengen. Dabei setzt man $0! = 1$.

Klassisches Beispiel: Zahlenlotto. Es gibt

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\,43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13983816$$

Möglichkeiten, aus einer 49–elementigen Menge eine 6–elementige Teilmenge auszuwählen.
Mit anderen Worten: Die Wahrscheinlichkeit, beim (klassischen) Zahlenlotto "6 aus 49" die 6 richtigen Zahlen zu tippen, beträgt

$$\frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816} = 0.0000000715112384201851\ldots$$

Einschub: Summen, Produkte und Potenzen I.

Definition:

Allgemeine Summen und Produkte.

$$\sum_{k=m}^{n} b_k := b_m + b_{m+1} + \cdots + b_n \quad (\text{falls } m \leq n)$$

$$\sum_{k=m}^{n} b_k := 0 \quad (\text{falls } m > n, \text{ leere Summe})$$

$$\prod_{k=m}^{n} b_k := b_m \cdot b_{m+1} \cdot \ldots \cdot b_n \quad (\text{falls } m \leq n)$$

$$\prod_{k=m}^{n} b_k := 1 \quad (\text{falls } m > n, \text{ leeres Produkt})$$

Einschub: Summen, Produkte und Potenzen II.

Definition:

Potenzen.

$$a^n := \begin{cases} \prod_{k=1}^{n} a & : \text{ für } n \geq 0 \\ 1/(a^{-n}) & : \text{ für } n < 0 \end{cases}$$

Potenzgesetze.

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{n+m} \\ (a^n)^m &= a^{n \cdot m} \end{aligned}$$

Binomialkoeffizienten und deren Eigenschaften I.

Definition:
Die (natürlichen) Zahlen $\binom{n}{m}$ nennt man Binomialkoeffizienten.

Satz:

a) Für $n, m \in \mathbb{N}$, $0 < m \leq n$, gilt die Rekursionsformel

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}$$

wobei

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

b) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt der Binomische Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}$$

Binomialkoeffizienten und deren Eigenschaften II.

Beweis zu Teil a): Es gilt $(n, m \in \mathbb{N}, 0 < m \leq n)$

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} &= \frac{n!}{m!\,(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m+1)!} \\
&= \frac{n!\,(n-m+1) + n!\,m}{m!\,(n+1-m)!} \\
&= \frac{n!\,(n+1-m+m)}{m!\,(n+1-m)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{m!\,(n+1-m)!} \\
&= \binom{n+1}{m}
\end{aligned}
$$

Beweis: Binomischer Lehrsatz I.

Beweis zu Teil b): durch vollständige Induktion über n.

- Induktionsanfang $(n = 0)$: Es gilt

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$$

- Induktionsannahme: Für $n \geq 0$ gelte

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

- Induktionsschluss $(n \to n+1)$:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}
\end{aligned}
$$

Beweis: Binomischer Lehrsatz II.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,a^k\,b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}$$

$$= \binom{n}{0}a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n}a^{n+1}b^0$$

$$= \binom{n+1}{0}a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}$$

Rekursive Berechnung der Binomialkoeffizienten.

Pascalsches Dreieck

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
(a+b)^5 &= 1\cdot a^0 b^5 + 5\cdot a^1 b^4 + 10\cdot a^2 b^3 + 10\cdot a^3 b^2 + 5\cdot a^4 b^1 + 1\cdot a^5 b^0 \\
&= a^5 + 5a^4 b + 10a^2 b^3 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5
\end{aligned}$$