Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Jens Struckmeier

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Wintersemester 2010/11

Informationen zur Lehrveranstaltung Analysis I.

1. Vorlesung:
   Mittwoch, 14:15–15:45 Uhr, Audimax II, AIW, ET, IIW
   Donnerstag, 9:45–11.15 Uhr, Audimax I, Rest
2. Anleitung:
   Freitag, 11:30–13:00 Uhr, Audimax I, Rest
   Freitag, 14:15–15:45 Uhr, Audimax II, AIW, ET, IIW
3. Übungsgruppen:
   14–tägig, im Wechsel mit der Linearen Algebra I, Beginn diese Woche
4. Internetseiten:
   `www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html`
5. Textbuch:
   R. Ansorge, H. J. Oberle: Mathematik für Ingenieure, Band 1,
   3. Auflage, Wiley–VCH, Berlin, 2000.

Inhalte der Vorlesung Analysis I.

1. Aussagen, Logik und Mengen.
2. Zahlensysteme, Relationen und Funktionen.
3. Folgen, Reihen und Konvergenz.
4. Vektorräume und Normen.
5. Stetige und gleichmäßig stetige Funktionen.
6. Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln.
7. Mittelwertsätze, lokale Extrema, Satz von Taylor.
8. Regel von de l'Hospital, Kurvendiskussion.
9. Iterationsmethoden und Banachscher Fixpunktsatz.

Kapitel 1. Aussagen, Mengen und Funktionen

1.1. Aussagen

Beispiele für Aussagen (mathematische und nicht–mathematische)

- heute ist Donnerstag
- heute scheint die Sonne
- 16 ist eine Quadratzahl
- 5 ist eine gerade Zahl

Kennzeichnende Eigenschaft mathematischer Aussagen:

Aussagen sind entscheidbar wahr oder falsch.

Wahrheitswerte: Sei A eine Aussage. Dann kann man A einen eindeutigen Wahrheitswert $w(A)$ zuordnen.

$$\begin{aligned} w(A) = 0 &\iff A \text{ ist falsch} \\ w(A) = 1 &\iff A \text{ ist wahr} \end{aligned}$$

Verknüpfung von Aussagen:

$\neg A$	:	Negation			
$A \wedge B$	:	Konjunktion	$A \vee B$	:	Disjunktion
$A \Rightarrow B$	:	Implikation	$A \Leftrightarrow B$	:	Äquivalenz

Wahrheitswertetafeln:

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg A)$	$w(A \wedge B)$	$w(A \vee B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(A \Leftrightarrow B)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Beachte:
Eine Implikation ist immer wahr, wenn die Prämisse falsch ist.

Also gilt: $A \Rightarrow B \;\Leftrightarrow\; \neg A \vee B$

Definition:

1. Eine Verknüpfung von Aussagen, die für sämtliche Kombinationen von Wahrheitswerten stets eine wahre Aussage ergibt, heißt **Tautologie**.
2. Eine Verknüpfung von Aussagen, die für sämtliche Kombinationen von Wahrheitswerten stets eine falsche Aussage ergibt, heißt **Kontradiktion**.

Beispiel:

Die folgenden Verknüpfungen sind Tautologien.

1. $$\Big((A \Rightarrow B) \wedge \neg B\Big) \;\Rightarrow\; \neg A$$
2. $$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Beispiel I für eine Tautologie.

Die Verknüpfung

$$\Big((A \Rightarrow B) \wedge \neg B\Big) \Rightarrow \neg A$$

ist eine Tautologie.

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(\neg B)$	$w((A \Rightarrow B) \wedge \neg B)$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

$w(A)$	$w(B)$	$w((A \Rightarrow B) \wedge \neg B)$	$w(\neg A)$	$w((A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1

Beispiel II für eine Tautologie.

Die Verknüpfung

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$$

ist eine Tautologie.

Wahrheitswertetafel.

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg(A \vee B))$	$w(\neg A \wedge \neg B)$	$w(\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B)$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	1	1

Definition und Beispiele für Aussageformen.

Definition:
Ein Aussage, die von Variablen abhängt, heißt **Aussageform**.

Beispiele für Aussageformen.

1. x ist eine gerade Zahl.
2. x ist größer als y.
3. x ist größer als y und y ist größer als z

Wahrheitswerte erhält man nur durch Einsetzen von Variablen

Beispiel:
Wir definieren eine Aussageform als

$$A(x, y) :\Leftrightarrow x^2 + y^2 < 4$$

1. $A(1/2, 1)$ ist wahr, d.h. $w(A(1/2, 1) = 1$,
2. $A(-3, 2)$ ist falsch, d.h. $w(A(-3, 2)) = 0$.

Quantoren.

Mathematische Aussagen werden häufig durch Kombination von Aussageformen mit Quantoren formuliert. Es gibt zwei Grundquantoren:

$\forall$ Allquantor $\qquad$ $\exists$ Existenzquantor

sowie den Quantor

$\exists_1$ Existenz mit Eindeutigkeit

Sei $A(x)$ eine Aussageform. Wir definieren neue Aussagen wie folgt.

1. $\forall x : A(x)$, d.h. für alle x gilt $A(x)$.
2. $\exists x : A(x)$, d.h. es gibt mindestens ein x, für das $A(x)$ gilt.
3. $\exists_1 x : A(x)$, d.h. es gibt genau ein x, für das $A(x)$ gilt.

Negation von Quantoren.

Die Wahrheitswerte der Aussagen werden entsprechend definiert.

$$\begin{aligned} w(\forall\, x : A(x)) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{für alle } x \text{ ist } w(A(x)) = 1. \\ w(\exists\, x : A(x)) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{es gibt mindestens ein } x \text{ mit } w(A(x)) = 1. \\ w(\exists_1\, x : A(x)) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{es gibt genau ein } x \text{ mit } w(A(x)) = 1. \end{aligned}$$

Negation von Quantoren:

$$\begin{aligned} \neg\Big(\forall\, x : A(x)\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, x : \Big(\neg A(x)\Big) \\ \neg\Big(\exists\, x : A(x)\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, x : \Big(\neg A(x)\Big) \end{aligned}$$

Ein Beispiel und Aufgaben zum Einsatz von Quantoren.

Beispiel und Aufgaben:

1. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in D$ $:\Leftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \ \exists\, \delta > 0 : \ \forall\, x \in D :$$

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$\Big($ (ε, δ)–Definition der Stetigkeit $\Big)$

2. Man verneine die Aussage

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \ \forall\, \varepsilon > 0 : \ \exists\, n \in \mathbb{N} : \ x - \varepsilon < n < x + \varepsilon$$

3. Negation des Stetigkeitsbegriffs

$$\neg\Big(\forall\, \varepsilon > 0 : \ \exists\, \delta > 0 : \ \forall\, x \in D :$$

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\Big)$$

Mathematische Sätze und Beweistechniken.

Standardform eines Satzes: aus A folgt B, also

$$A \;\Rightarrow\; B \quad \text{für Aussagen } A, B,$$

wobei A Voraussetzung (Prämisse) und B Behauptung (Konklusion) heißt.

Mögliche Beweistechniken:

1. Direkter Beweis (Kettenschluss)

$$A = A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n = B$$

2. Indirekter Beweis (Kontraposition, Widerspruch)

$$A \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \neg B \Rightarrow \neg A$$

ist eine Tautologie.

Exemplarisches Beispiel für einen Beweis.

Satz:

Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann gerade, wenn ihr Quadrat n^2 gerade ist, d.h. für $n \in \mathbb{N}$ gilt die Äquivalenz

$$n \text{ gerade} \quad \Longleftrightarrow \quad n^2 \text{ gerade.}$$

Beweis:

Wir führen den Beweis in zwei Schritten.

1. Schritt: Zeige die Implikation

$$n \text{ gerade} \quad \Longrightarrow \quad n^2 \text{ gerade.}$$

2. Schritt: Zeige die Implikation

$$n^2 \text{ gerade} \quad \Longrightarrow \quad n \text{ gerade.}$$

Beweis: n gerade $\iff$ n^2 gerade.

1. Schritt: Direkter Beweis.

Sei n gerade. Dann $\exists k \in \mathbb{N} \; : \; n = 2k$

$$n = 2k \;\Rightarrow\; n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \;\Rightarrow\; n^2 \text{ gerade}$$

2. Schritt: Indirekter Beweis. (Zeige $\neg B \Rightarrow \neg A$ statt $A \Rightarrow B$)

Sei n^2 gerade. Angenommen n ist ungerade. Dann $\exists k \in \mathbb{N} \; : \; n = 2k - 1$

$$\begin{aligned} n = 2k - 1 \quad &\Longrightarrow \quad n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k) + 1 \\ &\Longrightarrow \quad n^2 \text{ ist ungerade} \end{aligned}$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu unserer Annahme, dass n^2 gerade ist.

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.

Satz:
Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational, d.h. $\sqrt{2}$ lässt sich nicht als Bruch $\sqrt{2} = n/m$ mit natürlichen Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ darstellen.

Beweis: (durch Widerspruch)
Annahme: es gibt teilerfremde $n, m \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{2} = n/m$.
Dann gilt

$$2m^2 = n^2 \Rightarrow n^2 \text{ gerade} \Rightarrow n \text{ gerade} \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N} : n = 2k$$

Einsetzen in $2m^2 = n^2$ ergibt

$$2m^2 = n^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Rightarrow m^2 = 2k^2 \Rightarrow m^2 \text{ gerade} \Rightarrow m \text{ gerade}$$

Widerspruch zur Annahme, dass n und m teilerfremd sind.
Die Annahme $\sqrt{2} = \dfrac{n}{m}$ ist also **falsch** $\quad\Rightarrow\quad$ $\sqrt{2}$ ist irrational!

1.2. Mengen

Definition:
Eine Menge ist eine Kollektion von paarweise verschiedenen Objekten. Die einzelnen Objekte werden Elemente der Menge genannt.

Beispiele für Mengen.

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ Menge der natürlichen Zahlen.
2. $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ Menge der nicht–negativen ganzen Zahlen.
3. Menge der Primzahlen.

Notationen: Sei M eine Menge.

$$a \in M \iff a \text{ ist ein Element der Menge } M$$

$$a \notin M \iff \neg(a \in M)$$

Definition von Mengen.

1. Aufzählung der Elemente $M := \{1, 2, 3, 4\}$.
2. Charakterisierende Eigenschaft der Menge, $M := \{x \in \Omega \,|\, A(x)\}$.

Bedeutung der verwendeten Symbole.

:=	"wird definiert durch"
A(x)	Aussageform, definiert für Elemente aus dem Grundbereich Ω

Teilmengen von Mengen.

$$M \subset N \iff \forall x \, : \, (x \in M \Rightarrow x \in N)$$

Gleichheit von Mengen.

$$M = N \iff \forall x \, : \, (x \in M \Leftrightarrow x \in N)$$

Leere Menge. Menge, die kein Element enthält. Bezeichnung: $\emptyset$

Ordnungseigenschaften und Verknüpfung von Mengen.

Ordnungseigenschaften.

1. $M \subset M$
2. $M \subset N \wedge N \subset M \quad \Rightarrow \quad M = N$
3. $M \subset N \wedge N \subset P \quad \Rightarrow \quad M \subset P$

Verknüpfung von Mengen.

$$
\begin{array}{lcll}
M \cup N & := & \{x \,|\, x \in M \vee x \in N\} & \text{(Vereinigung)} \\
M \cap N & := & \{x \,|\, x \in M \wedge x \in N\} & \text{(Durchschnitt)} \\
M \setminus N & := & \{x \,|\, x \in M \wedge x \notin N\} & \text{(Differenz)} \\
M \times N & := & \{(a,b) \,|\, a \in M \wedge b \in N\} & \text{(Cartesisches Produkt)} \\
\mathcal{P}(M) & := & \{X \,|\, X \subset M\} & \text{(Potenzmenge)}
\end{array}
$$

Bemerkungen und weitere Bezeichnungen.

- Gilt $M \cap N = \emptyset$, so nennt man M und N disjunkt.
- Verknüpfung von endlich viele Mengen

$$
\begin{aligned}
\bigcup_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \\
&= \{a \,|\, \exists\, i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, a \in A_i\} \\
\bigcap_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \\
&= \{a \,|\, \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, a \in A_i\} \\
\prod_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \\
&= \{(a_1, \ldots, a_n) \,|\, \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, a_i \in A_i\}
\end{aligned}
$$

Bemerkungen und weitere Bezeichnungen.

- Für geordnete Paare bzw. n–Tupel gilt:

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \iff a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2$$

$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \iff \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, x_i = y_i$$

- Wichtige Cartesische Produkte:
  - die Euklidische Ebene

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

  - der dreidimensionale Euklidische Raum

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

  - der n–dimensionale Euklidische Raum

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{\text{n–fach}} = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{R}\}$$

Einige Beispiele für Mengen im $\mathbb{R}^n$.

- Kreisscheibe mit Radius $r = 1$.

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

- Zwei Streifen in der Euklidischen Ebene.

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 5 \leq x^2 + 1 \leq 17\}$$

Beachte:

$$5 \leq x^2 + 1 \leq 17 \Leftrightarrow 4 \leq x^2 \leq 16 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq -2 \vee 2 \leq x \leq 4$$

und somit gilt

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -4 \leq x \leq -2 \;\vee\; 2 \leq x \leq 4\}$$

Einige Beispiele für Mengen im $\mathbb{R}^n$.

- Intervalle in $\mathbb{R}$. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

$$\begin{array}{lcll} [a,b] & := & \{x \,|\, a \le x \le b\} & \text{abgeschlossenes Intervall} \\ (a,b) & := & \{x \,|\, a < x < b\} & \text{offenes Intervall} \\ [a,b) & := & \{x \,|\, a \le x < b\} & \text{halboffenes Intervall} \\ (a,b] & := & \{x \,|\, a < x \le b\} & \text{halboffenes Intervall} \end{array}$$

- Querschnitt eines T–Trägers.

$$\begin{array}{rcl} M & := & M_1 \cup M_2 \\ M_1 & := & \left[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right] \times [-\gamma, 0] \\ M_2 & := & \left[-\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right), \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)\right] \times [0, \delta] \end{array}$$