Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2010/11**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. K. Rothe

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 9:

Man untersuche die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

$$a_n = \sqrt{4n^2+11n} - \sqrt{4n^2-3}\,, \qquad b_n = \sqrt[3]{\frac{n^3+3n^2+3n+2}{8n^3+4n^2+2}}\,,$$

$$c_n = \frac{n^2+3}{n-1} - \frac{n^3+2}{n^2+4n}\,, \qquad d_n = \left(\frac{4n+5}{4n}\right)^{3n}\,,$$

$$e_n = \frac{(-1)^n + 15\cdot 7^{n-1}}{10\cdot 4^{n+2} - 3\cdot 7^{n+1}}\,, \qquad f_n = \frac{n+i^n}{3n} \quad (\in \mathbb{C})\,.$$

Aufgabe 10:

Man untersuche die folgenden rekursiv definierten Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

a) $a_1 = 1\,,\quad a_{n+1} = \dfrac{5-3a_n}{4}\,,$

b) $b_1 = 3,\ b_{n+1} = \dfrac{b_n^2+8}{6}\,,$

c) $c_1 = 2,\ c_{n+1} = \dfrac{13}{6-c_n}\,,$

d) $d_1 = 2,\ d_{n+1} = \sqrt{6+d_n}\,.$

Aufgabe 11:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - x - 6$, sowie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die sich aus dem Newton-Verfahren zur Nullstellenberechnung von f mittels Startwert $x_0 \geq 3$ ergibt.

a) Man zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Nullstelle x^* konvergiert und berechne diese.

b) Man zeige, dass die Folge (lokal) quadratisch konvergiert, d.h. es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit
$$|x_{n+1} - x^*| \leq c|x_n - x^*|^2 .$$

Aufgabe 12:

Man zeige, dass die rekursiv definierte Folge

$$x_0 = a\,, \quad x_1 = b\,, \quad x_n = 9x_{n-1} - 20x_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2$$

folgende explizite Darstellung für $n \in \mathbb{N}$ besitzt:

$$x_n = (5a - b)4^n + (b - 4a)5^n .$$

Hinweis: Für den Beweis eignet sich die vollständige Induktion.

Abgabetermin: 6.12. - 10.12.10 (zu Beginn der Übung)