# Analysis I für
# Studierende der Ingenieurwissenschaften

Ingenuin Gasser

Department Mathematik

Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg

Wintersemester 2008/2009



**Kapitel 5: Weiterer Ausbau der Differentialrechnung**

**5.1 Mittelwertsätze, Extremwerte, Satz von Taylor**

1) **Satz von Rolle**
   Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf $(a,b)$, so gilt:

$$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad \exists\, x_0 \in (a,b) \;:\; f'(x_0) = 0$$

2) **Erster Mittelwertsatz**
   Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf $(a,b)$, so gilt:

$$\exists\, x_0 \in (a,b) \quad : \qquad f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

3) **Zweiter Mittelwertsatz**
   Sind die Funktionen $f, g$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf $(a,b)$ und gilt $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$, so gilt:

$$\exists\, x_0 \in (a,b) \quad : \qquad \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

## Monotone Funktionen

Für eine auf $[a, b]$ differenzierbare Funktion gilt:

$$\begin{array}{lllll}
\forall\, x & : & f'(x) \geq 0 & \Leftrightarrow & f(x) \text{ monoton wachsend} \\
\forall\, x & : & f'(x) > 0 & \Rightarrow & f(x) \text{ streng monoton wachsend} \\
\forall\, x & : & f'(x) \leq 0 & \Leftrightarrow & f(x) \text{ monoton fallend} \\
\forall\, x & : & f'(x) < 0 & \Rightarrow & f(x) \text{ streng monoton fallend}
\end{array}$$

**Beispiel:** Die Ableitung der Funktion $f(x) = x - \ln(x+1)$, $-1 < x < \infty$, lautet

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

Damit ist $f$ auf $(-1, 0)$ monoton fallend, auf $(0, \infty)$ monoton wachsend. Insbesondere gilt für alle $x \neq 0$

$$f(x) > f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(1+x) < x \quad (\forall x \in (-1, \infty), x \neq 0)$$



## Lokale Extremwerte

**Definition:** Sei $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset V$, $V$ normierter Vektorraum), $x_0 \in D$.

1) $f(x)$ hat in $x_0$ ein **globales Maximum**, falls gilt:

$$\forall\, x \in D \;:\quad f(x) \leq f(x_0)$$

2) $f(x)$ hat in $x_0$ ein **strenges globales Maximum**, falls gilt:

$$\forall\, x \in D \setminus \{x_0\} \;:\quad f(x) < f(x_0)$$

3) $f(x)$ hat in $x_0$ ein **lokales Maximum**, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit:

$$\forall\, x \in D \;:\quad \|x - x_0\| < \varepsilon \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(x_0)$$

4) $f(x)$ hat in $x_0$ ein **strenges lokales Maximum**, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit:

$$\forall\, x \in D \;:\quad 0 < \|x - x_0\| < \varepsilon \;\Rightarrow\; f(x) < f(x_0)$$

Analoge Definitionen gelten für minimale Funktionswerte (Extremwerte).

**Satz: (Kriterium für lokale Extrema I)**

Besitzt $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in [a,b]$ ein lokales Extremum und ist $f(x)$ in $x_0$ differenzierbar, so gilt:

$$a < x_0 < b \;\Rightarrow\; f'(x_0) = 0$$

$$x_0 = a \;\Rightarrow\; f'(x_0) \begin{cases} \leq 0 & \text{für ein Maximum} \\ \geq 0 & \text{für ein Minimum} \end{cases}$$

$$x_0 = b \;\Rightarrow\; f'(x_0) \begin{cases} \geq 0 & \text{für ein Maximum} \\ \leq 0 & \text{für ein Minimum} \end{cases}$$

**Bemerkung:** Die Punkte $x_0$ mit $f'(x_0) = 0$ heißen **stationäre Punkte**.

Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist lediglich eine **notwendige Bedingung** für ein Extremum. Randpunkte sowie Punkte, an denen $f(x)$ nicht differenzierbar ist, werden mit der notwendigen Bedingung nicht erfasst.



**Beispiel:**

Betrachte die Funktion $f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$ auf dem Intervall $[-1,1]$. Es gilt

$$f'(x) = \frac{2x - 3x^3}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

**Stationäre Punkte:** $2x - 3x^3 = 0 \Rightarrow x \in \{-\sqrt{2/3}, 0, \sqrt{2/3}\}$

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & : \; -1 < x < -\sqrt{2/3} \\ < 0 & : \; -\sqrt{2/3} < x < 0 \\ > 0 & : \; 0 < x < \sqrt{2/3} \\ < 0 & : \; \sqrt{2/3} < x < 1 \end{cases}$$

Globale Minima bei $x = \pm 1, 0$ mit Funktionswert $f(x) = 0$

Globale Maxima bei $x = \pm\sqrt{2/3}$ mit Funktionswert $f(x) = 2/(3\sqrt{3})$

**Definition: (Landau–Symbole)** Für eine Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $0 \in D \cap D'$, und $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ sagt man:

$$\varphi(h) = o(h^k) \quad :\Leftrightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h^k} = 0$$

$$\varphi(h) = O(h^k) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists\, C, \varepsilon > 0 \ : \ \forall\, 0 < |h| < \varepsilon \ : \ \left(h \in D \ \Rightarrow \ \left|\frac{\varphi(h)}{h^k}\right| \leq C\right)$$

**Bedeutung:**

$\varphi(h) = o(h^k)$: $\varphi(h)$ konvergiert für $h \to 0$ schneller gegen Null als $h^k$

$\varphi(h) = O(h^k)$: $\varphi(h)$ konvergiert für $h \to 0$ wenigstens so schnell gegen Null wie $h^k$

**Ableitung:** Ist $f$ differenzierbar in $x_0$, so gilt:

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0)$$



**Taylor–Entwicklung, Taylor–Polynom, Satz von Taylor:**

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $C^n$–Funktion und $x_0 \in (a, b)$.

**Frage:** Wie kann man $f(x)$ in der Nähe von $x_0$ approximieren?

**Erste Antwort:** $f$ ist differenzierbar, also gilt

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\textbf{Polynom vom Grad 1}} + o(x - x_0)$$

**Zweite Antwort:**

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2}}_{\textbf{Polynom vom Grad 2}} + o\left((x - x_0)^2\right)$$

Denn es gilt ebenfalls:

$$f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Integration über $[x_0, x]$ liefert die zweite Antwort.

**Satz von Taylor:** (Taylor–Entwicklung, Taylor–Polynom)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $C^n$–Funktion und $x_0 \in (a, b)$.

Dann gilt:

$$f(x) = T_n(x; x_0) + o\left((x - x_0)^n\right)$$

Dabei lautet das (eindeutig bestimmte) **Taylor–Polynom**

$$T_n(x; x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Den Punkt $x_0$ nennt man den **Entwicklungspunkt**.
Ist $f$ eine $C^{n+1}$–Funktion, so gilt die **Restgliedformel (Lagrange):**

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x; x_0) \\ R_n(x; x_0) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad (|\xi - x_0| < |x - x_0|) \end{aligned}$$



**Bemerkung:** Andere Darstellungen für das Restglied:

1) Integraldarstellung des Restglieds:

$$R_n(x; x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

2) Restgliedformel von Cauchy:

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^{n+1}(1 - \theta)^n$$

mit $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0, 1)$

3) Restgliedformel von Schlömilch:

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{p\, n!}(x - x_0)^{n+1}(1 - \theta)^{n+1-p}$$

mit $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0, 1)$, $p \in \{1, 2, \ldots, n + 1\}$

**Beispiel:** Taylor–Entwicklung der Exponentialfunktion

Betrachte die Exponentialfunktion $f(x) := \exp(x)$. Zunächst gilt:

$$(\exp(x))' = \exp(x)$$

Daher gilt nach der Taylor–Entwicklung mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x;0)$$

Das Restglied lautet:

$$R_n(x;0) = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \xi = \theta x, \quad 0 < \theta < 1$$

Fehlerabschätzung für $0 \leq x \leq 1$:

$$|R_n(x;x_0)| = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \leq \frac{e}{(n+1)!}$$

Zum Beispiel: $|R_{10}(x;x_0)| \leq 6.81 \cdot 10^{-8}$