Analysis I für
Studierende der Ingenieurwissenschaften

Ingenuin Gasser
Department Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Wintersemester 2008/2009

Definition: (Stetige Funktionen) Sei $f : D \to W, D \subset V$

1) Die Funktion $f(x)$ heißt **stetig ergänzbar** in $x_0 \in D'$, falls $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert (und endlich ist).
2) Die Funktion $f(x)$ heißt **stetig in** $x_0 \in D \cap D'$, falls $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.
3) Die Funktion $f(x)$ heißt **stetig**, falls $f(x)$ in **allen** Punkten $x_0 \in D \cap D'$ stetig ist.

Satz: (ε–δ–Definition)

Für $x_0 \in D \cap D'$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

1) $f(x)$ ist stetig in x_0, d.h. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
2) $\forall\, \varepsilon > 0 \ : \ \exists\, \delta > 0 \ : \ \forall\, x \in D \ :$

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

Beweis:
1) $\Rightarrow$ 2): **Annahme:** $\exists\,\varepsilon > 0\ :\ \forall\,\delta > 0\ :\ \exists\,x_\delta \in D\ :$

$$\|x_\delta - x_0\| < \delta \quad \wedge \quad \|f(x_\delta - f(x_0)\| \geq \varepsilon$$

Die Wahl $\delta = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ generiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in D$ mit

$$\|x_n - x_0\| < \frac{1}{n} \quad \wedge \quad \|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$$

Wegen $\|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$ gilt

$$x_n \neq x_0 \quad \Rightarrow \quad x_n \in D \setminus \{x_0\}$$

sowie

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

Gleichzeitig konvergiert aber $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen $f(x_0)$ $\quad\Rightarrow$

Widerspruch dazu, dass $f(x)$ im Punkt x_0 stetig ist.

Beweis: (Fortsetzung)
2) $\Rightarrow$ 1): Es gelte

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad x_n \in D \setminus \{x_0\}$$

Zu $\varepsilon > 0$ wählt man ein $\delta > 0$ mit

$$\forall\,x \in D\ :\ \|x - x_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

Sei nun $N = N(\varepsilon)$ mit

$$\forall\,n \geq N\ :\ \|x_n - x_0\| < \delta$$

Dann folgt direkt

$$\forall\,n \geq N\ :\ \|f(x_n) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

also

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Damit ist die Funktion $f(x)$ stetig im Punkt x_0

Beispiele stetiger Funktionen:

1) Konstante Funktionen $f : D \to W, \quad f(x) = a \in W$ sind stetig.
2) Die Identität auf einem normierten Vektorraum ist stetig
$$f : V \to V, \quad f(x) = x$$
3) Die Polynomfunktionen
$$y = f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$
als Funktionen $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sind stetig.
4) Polynomfunktionen in n Variablen
$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{m} a_{k_1,\ldots,k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$$
sind stetig

Beispiele stetiger Funktionen: (Fortsetzung)

5) Die Funktion $\sqrt[m]{x} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig auf $[0, \infty)$
6) Potenzreihen der Form
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$
sind auf dem Bereich der absoluten Konvergenz der Reihe stetig.
Beispiele: $\exp(z), \ln z, \sin z, \cos z, \tan z, \ldots$
7) Sind die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ stetig im Punkt x_0, so auch
$$f(x) + g(x), \quad \lambda \cdot f(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x_0) \neq 0)$$
8) Die Komposition stetiger Funktionen ist wieder eine stetige Funktion
Beispiel: $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$ ist auf dem ganzen $\mathbb{R}^2$ stetig

Satz: (ohne Beweis) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, reellwertige Funktion, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt.

1) **Existenz einer Nullstelle:**
$$f(a) \cdot f(b) < 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, x_0 \in (a, b) \;:\; f(x_0) = 0$$
2) **Zwischenwertsatz:**
$$f(a) < c < f(b) \quad \Rightarrow \quad \exists\, x_0 \in (a, b) \;:\; f(x_0) = c$$
3) **Stetigkeit der Umkehrfunktion:**
Ist $f(x)$ streng monoton wachsend, d.h. mit $x < y$ folgt $f(x) < f(y)$, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend.
4) **Min–Max–Eigenschaft:**
Es gibt $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit:
$$f(x_1) = \min_{x \in [a,b]} f(x) \qquad f(x_2) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

Wichtige Bemerkung:

Bei der Min–Max–Eigenschaft ist es wesentlich, dass man ein **kompaktes** (d.h. beschränktes und abgeschlossenes) Intervall $[a, b]$ betrachtet. Sonst gilt die Aussage nicht!!!

Beispiel:

Betrachte die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D = (0, \infty) \subset \mathbb{R}$ und
$$f(x) = \frac{1}{x}$$
Es gilt
$$D' = [0, \infty), \qquad D \cap D' = (0, \infty)$$
Die Funktion ist auf $D \cap D' = (0, \infty)$ stetig, nimmt aber weder ein Minimum noch Maximum an.

Min–Max–Eigenschaft ist nicht anwendbar, da D nicht kompakt ist!!!

Min–Max–Eigenschaft bei Funktionen mehrerer Veränderlicher:

Definition: Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **kompakt (folgenkompakt)**, falls jede Folge $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{x}_k \in D$, eine **in der Menge** D konvergente Teilfolge $\mathbf{x}_{k_j} \to \mathbf{x}_0 \in D$ $(j \to \infty)$ besitzt.

Satz: Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es Punkte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$ mit

$$f(\mathbf{x}_1) = \min_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x}) \qquad f(\mathbf{x}_2) = \max_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$$

Merkregel:

Eine stetige Funktion nimmt auf einem Kompaktum ihr Minimum und Maximum an.

Satz: (Kriterien für Kompaktheit)

Für eine Menge $D \subset \mathbb{R}$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

1) D ist kompakt
2) D ist abgeschlossen und beschränkt
3) **Heine–Borel–Überdeckung:**
   Jede Überdeckung von D aus offenen Mengen besitzt eine endliche Teilüberdeckung:

$$D \subset \bigcup_{i\in I} U_i, \quad U_i \text{ offen} \quad \Rightarrow \quad \exists\, i_1, \ldots, i_k \in I \ : \ D \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_{i_j}$$

Beispiel: Sei S^{n-1} die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|$:

$$S^{n-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

Offensichtlich ist S^{n-1} kompakt (abgeschlossen und beschränkt). Damit existieren für jede gegebene Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ zwei Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S^{n-1}$ mit

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x_1}\| = \min_{\mathbf{x} \in S^{n-1}} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \qquad \|\mathbf{A}\mathbf{x_2}\| = \max_{\mathbf{x} \in S^{n-1}} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$$

Dies folgt aus der Min–Max–Eigenschaft, denn die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$$

ist stetig.

Gleichmäßige Stetigkeit:

Definition: Eine Funktion $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **gleichmäßig stetig**, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \;:\; \exists \delta > 0 \;:\; \forall \mathbf{x}, \mathbf{x_0} \in D \;:$$
$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x_0})\| < \varepsilon$$

Satz:

Jede stetige Funktion auf einem Kompaktum D ist gleichmäßig stetig.

Beispiel: Die Funktion $f(x) = \exp(x)$ ist offensichtlich stetig auf $\mathbb{R}$. Ist $f(x)$ auch gleichmäßig stetig?