

# Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Ingenuin Gasser  
Department Mathematik  
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg  
Wintersemester 2008/2009

1

## 3.2 Konvergenzkriterien für reelle Folgen

**Definition:** Eine reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt

**monoton wachsend**  $:\Leftrightarrow \forall n < m : a_n \leq a_m$   
**streng monoton wachsend**  $:\Leftrightarrow \forall n < m : a_n < a_m$   
**nach oben beschränkt**  $:\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} : \forall n : a_n \leq C$

Analog: monoton fallend, streng monoton fallend, nach unten beschränkt

**Satz:** Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist konvergent mit Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

2

**Satz:** Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist konvergent mit Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

**Beweis:** Folge ist nach oben beschränkt  $\Rightarrow \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  besitzt Supremum

$$s := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Dann existiert ein  $N = N(\varepsilon)$  mit

$$s - \varepsilon < a_N \leq s$$

Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist monoton wachsend, also folgt

$$s - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq s \quad \forall n \geq N$$

d.h.

$$|s - a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

3

**Folgerung: Prinzip der Intervallschachtelung**

Sind  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reelle Folgen mit

- a)  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend
- b)  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend
- c)  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n$

so sind **beide Folgen konvergent**.

Gilt überdies

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$$

so haben  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  denselben Grenzwert, i.e.

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Zusätzlich gelten die Fehlerabschätzungen

$$|a_n - \xi| \leq |b_n - a_n| \quad |b_n - \xi| \leq |b_n - a_n|$$

4

### Beispiel: Arithmetisch–geometrisches Mittel

Definiere für  $0 < a < b$  rekursiv zwei Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  mittels

$$\begin{aligned} a_0 &:= a & b_0 &:= b \\ a_{n+1} &:= \sqrt{a_n b_n} & b_{n+1} &:= \frac{a_n + b_n}{2} \end{aligned}$$

Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  bilden Intervallschachtelung und es gilt

$$(b_{n+1} - a_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

Der gemeinsame Grenzwert von  $(a_n)$  und  $(b_n)$

$$\text{agm}(a, b) := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

heißt

### Arithmetisch–geometrisches Mittel

5

### Bernoullische Ungleichung:

$$\forall x \geq -1, n \in \mathbb{N} : (1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Gleichheit gilt nur bei  $n = 1$  oder  $x = 0$

**Beispiel:** Geometrische Folge  $a_n := q^n$  mit  $q \in \mathbb{R}$ .

$$q > 1 : \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty \quad (q^n = (1 + (q - 1))^n \geq 1 + n(q - 1))$$

$$q = 1 : \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1$$

$$0 < q < 1 : \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad (q^n = \frac{1}{(1 + (1/q - 1))^n} \leq \frac{1}{1 + n(1/q - 1)})$$

$$-1 < q \leq 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad (|q^n| = |q|^n)$$

$$q = -1 : (q^n) \text{ beschränkt, aber nicht konvergent} \quad (q^n \in \{-1, 1\})$$

$$q < -1 : (q^n) \text{ divergent, kein uneigentlicher Grenzwert}$$

6

**Satz:** Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergente reelle Folgen. Dann gelten

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)$$

$$\text{b) } \forall n : b_n \neq 0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

$$\text{c) } \forall n : a_n \geq 0 \wedge m \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

**Beweis:** Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei konvergente Folgen mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

7

**Teil a):** Es gilt (für hinreichend große  $n$ )

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \\ &\leq C_a \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \\ &< (C_a + |b|) \varepsilon \end{aligned}$$

**Teil b):** Da  $b_n \neq 0$  und  $b \neq 0$  existiert eine Konstante  $C_b > 0$  mit

$$C_b \leq |b_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Damit gilt

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| = \frac{1}{|b_n| \cdot |b|} \cdot |b_n - b| \leq \frac{1}{C_b \cdot |b|} \cdot \varepsilon$$

für  $n$  hinreichend groß und die Aussage in b) folgt direkt aus Teil a) (denn  $1/b_n \rightarrow 1/b$ )

8

**Teil c):** Wir setzen folgenden Satz voraus (Beweis Ansorge/Oberle):

**Satz:** Zu  $a > 0$  und  $m \in \mathbb{N}$  existiert genau eine Zahl  $w > 0$  mit  $w^m = a$ .  
Diese Zahl wird mit  $w = \sqrt[m]{a}$  bezeichnet.

**1. Fall:** Sei  $(a_n)$  eine Nullfolge und  $\varepsilon > 0$  vorgegeben

$$a_n < \varepsilon^m \quad \forall n \geq N(\varepsilon^m)$$

Daraus folgt

$$0 \leq \sqrt[m]{a_n} < \varepsilon$$

und daher  $\sqrt[m]{a_n} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$

**2. Fall:** Sei  $a > 0$ . Verwende die Identität

$$x^m - y^m = (x - y) \sum_{j=1}^m x^{m-j} y^{j-1}$$

9

**Identität:**

$$\begin{aligned} (x - y) \sum_{j=1}^m x^{m-j} y^{j-1} &= (x - y) \cdot (x^{m-1} y^0 + x^{m-2} y^1 + \dots + x^0 y^{m-1}) \\ &= x^m y^0 + \dots + x^0 y^{m-1} - x^{m-1} y^1 - \dots - x^0 y^m \\ &= x^m - y^m \end{aligned}$$

Setze nun  $x = \sqrt[m]{a_n}$  und  $y = \sqrt[m]{a}$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \left| \sqrt[m]{a_n} - \sqrt[m]{a} \right| &= \frac{|a_n - a|}{\left| (\sqrt[m]{a_n})^{m-1} + \dots + (\sqrt[m]{a})^{m-1} \right|} \\ &\leq \frac{|a_n - a|}{(\sqrt[m]{a})^{m-1}} \\ &< C \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

für  $n \geq N(\varepsilon)$

10

**Bemerkung:** Die Aussagen a) und b) gelten auch für komplexe Folgen

**Beispiel:** Gegeben sei die Folge

$$a_n := \sqrt{n^2 + 5n + 1} - n$$

Eine Umformung ergibt:

$$a_n = \frac{(n^2 + 5n + 1) - n^2}{\sqrt{n^2 + 5n + 1} + n} = \frac{5 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1}$$

und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{5 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 1}} = \frac{5}{2}$$

11

**Beispiel:** Wir betrachten die Folge

$$a_n := \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n$$

Kapitalverzinsung: Anfangskapital  $K_0$ , Jahreszinssatz  $p$

$K_1$	$= K_0(1 + p)$	jährlich
$K_2$	$= K_0 \left(1 + \frac{p}{2}\right)^2$	halbjährlich
$K_4$	$= K_0 \left(1 + \frac{p}{4}\right)^4$	vierteljährlich
$K_{10}$	$= K_0 \left(1 + \frac{p}{10}\right)^{10}$	monatlich
$K_{360}$	$= K_0 \left(1 + \frac{p}{360}\right)^{360}$	täglich

Untersuche die Konvergenz der Folge  $a_n$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$$

12

Für  $p > 0$  zeigt man direkt:

- die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist streng monoton wachsend

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

- die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist nach oben beschränkt

$$\left(1 + \frac{p}{n}\right)^n \leq 4^l \quad (\text{für ein } l \geq p)$$

Damit konvergiert die Folge:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^p$$

Formel gilt auch für negative  $p$ .

Spezialfall

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182\ 81828 \dots$$

**(Eulersche Zahl)**

13

**Satz:** (Cauchysches Konvergenzkriterium)

Der  $\mathbb{R}$  ist **vollständig**, d.h. jede reelle Cauchyfolge ist konvergent.

Zum Beweis verwendet man das Konzept von

### Häufungspunkten

einer gegebenen Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### Beispiel auf Folie

**Definition:** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge. Die Grenzwerte konvergenter Teilfolgen von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nennt man die **Häufungspunkte der Folge**  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Satz:** (Satz von Bolzano, Weierstraß)

Jede reelle, beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

14

**Satz:** (Cauchysches Konvergenzkriterium)

Der  $\mathbb{R}$  ist **vollständig**, d.h. jede reelle Cauchyfolge ist konvergent.

**Beweisidee:**

Zeige zunächst, dass jede Cauchyfolge beschränkt ist:

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| < \varepsilon + |a_N|$$

Nach Bolzano, Weierstraß besitzt  $(a_n)$  einen Häufungspunkt  $\xi$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} |a_m - \xi| &= |a_m - a_{n_k} + a_{n_k} - \xi| \\ &\leq \underbrace{|a_m - a_{n_k}|}_{\text{Cauchyfolge}} + \underbrace{|a_{n_k} - \xi|}_{\text{Häufungspunkt}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

**Notation:**

$\liminf a_n$  = kleinster Häufungspunkt

$\limsup a_n$  = größter Häufungspunkt

15

### 3.3 Folgen in Vektorräumen

Abschnitt 3.2: Konvergenzkriterien für reelle Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $a_n \in \mathbb{R}$

Sei nun  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum.

Wiederholung aus Abschnitt 3.2:

**Definition: Konvergenz von Folgen**

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $V$  (Vektorraum mit Norm  $\|\cdot\|$ )

...

3) Eine Folge  $(a_n)$  heißt **konvergent** mit **Grenzwert (Limes)**  $a \in V$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \|a_n - a\| < \varepsilon$$

...

**Beispiel:** (Unendlich-dimensionale) Funktionenräume

16

## Endlich–dimensionale Vektorräume (zum Beispiel $\mathbb{R}^n$ )

**Satz:** (Normäquivalenzsatz)

Je zwei Normen  $\|\cdot\|$  und  $\|\cdot\|'$  eines endlichdimensionalen Vektorraums  $V$  sind **äquivalent**, d.h. es gibt positive Konstanten  $C_1, C_2 > 0$  mit

$$\forall v \in V \quad : \quad C_1\|v\| \leq \|v\|' \leq C_2\|v\|$$

Konvergenz und Grenzwert einer Folge sind unabhängig von der Norm.

**Folgerung:** Eine Folge  $(\mathbf{x}_m)$  im  $\mathbb{R}^n$  konvergiert genau dann, wenn alle  $n$  Koordinatenfolgen  $(x_j^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}, j = 1, \dots, n$  konvergieren. Der Grenzwert der Folge lässt sich komponentenweise berechnen.

**Beispiel:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n}, 1 + \exp\left(\frac{1}{n}\right), \frac{n^2 + 2n + 3}{2n^2 - 1} \right)^T = \left( 0, 2, \frac{1}{2} \right)^T$$

17

In endlichdimensionalen Vektorräumen gilt daher auch

- das **Cauchysche Konvergenzkriterium**

$$\exists \mathbf{a} : \mathbf{a}_m \rightarrow \mathbf{a} \quad (m \rightarrow \infty)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : m, n \geq N : \|\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_n\| < \varepsilon$$

- und der **Satz von Bolzano, Weierstraß**

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge

**Beispiel:** Für  $a_n := z^n, z \in \mathbb{C}$  gegeben, gilt

$$|z| > 1 \Rightarrow |a_n| = |z|^n \text{ unbeschränkt} \Rightarrow (a_n) \text{ divergent}$$

$$|z| < 1 \Rightarrow |a_n| = |z|^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$$

18