Analysis I für
Studierende der Ingenieurwissenschaften

Ingenuin Gasser
Department Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Wintersemester 2008/2009

Folgerung:

Eine n–elementige Menge $\{a_1, \ldots, a_n\}$ besitzt genau

$$\binom{n}{m} := \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

m–elementige Teilmengen. Dies gilt für alle ganzen Zahlen $0 \leq m \leq n$, wobei zusätzlich $0! := 1$ gesetzt wird.

Beweis: Vollständige Induktion unter Verwendung des nächsten Satzes

Bezeichnung:

Die natürlichen Zahlen $\binom{n}{m}$ nennt man **Binomialkoeffizienten**.

Satz:

a) Für $n, m \in \mathbb{N}$, $0 < m \leq n$, gilt die Rekursionsformel:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}$$

b) Für reelle (und auch komplexe) a,b und $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt der

Binomische Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}$$

Definition:

Allgemeine Summen und Produkte

$$\sum_{k=m}^{n} b_k \; := \; b_m + b_{m+1} + \ldots + b_n \quad \text{(falls } m \leq n\text{)}$$

$$\sum_{k=m}^{n} b_k \; := \; 0 \quad \text{(falls } m > n\text{, leere Summe)}$$

$$\prod_{k=m}^{n} b_k \; := \; b_m \cdot b_{m+1} \cdot \ldots \cdot b_n \quad \text{(falls } m \leq n\text{)}$$

$$\prod_{k=m}^{n} b_k \; := \; 1 \quad \text{(falls } m > n\text{, leeres Produkt)}$$

Definition:

Potenzen

$$a^n := \prod_{k=1}^{n} a \quad \text{für } n \geq 0$$

$$a^n := 1/(a^{-n}) \quad \text{für } n < 0$$

Dann gelten die Potenzgesetze:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Satz:

a) Für $n, m \in \mathbb{N}$, $0 < m \leq n$, gilt die Rekursionsformel:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}$$

b) Für reelle (und auch komplexe) a,b und $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt der

Binomische Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}$$

Beweis zu a): $(n, m \in \mathbb{N}, 0 < m \leq n)$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} &= \frac{n!}{m!\,(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m+1)!} \\
&= \frac{n!\,(n-m+1) + n!\,m}{m!\,(n+1-m)!} \\
&= \frac{n!\,(n+1-m+m)}{m!\,(n+1-m)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{m!\,(n+1-m)!} \\
&= \binom{n+1}{m}
\end{aligned}$$

Beweis zu b): (vollständige Induktion)

$n = 1$:

$$(a+b)^1 = a + b = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \overset{\text{Ind.vor.}}{=} (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&\overset{j=k+1}{=} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\overset{j=k+1}{=} \quad & \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
= \quad & \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} \\
= \quad & \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^{0} \\
= \quad & \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}
$$

denn

$$
\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1
$$

Berechnung der Binomialkoeffizienten mit Hilfe des

Pascalsches Dreieck

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

Beispiel: Binomischer Lehrsatz

$$
\begin{aligned}
(a+b)^5 &= 1 \cdot a^0 b^5 + 5 \cdot a^1 b^4 + 10 \cdot a^2 b^3 + 10 \cdot a^3 b^2 + 5 \cdot a^4 b^1 + 1 \cdot a^5 b^0 \\
&= a^5 + 5a^4 b + 10a^2 b^3 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5
\end{aligned}
$$

Primzahlen, ggT und kgV

Definition: Eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ heißt Teiler von $n \in \mathbb{N}$, falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$n = k \cdot m$$

Man schreibt dann auch $m|n$.

Jede Zahl besitzt also offensichtlich die beiden Teiler 1 und n, denn es gilt stets

$$n = n \cdot 1 = 1 \cdot n$$

Existiert für $n > 1$ kein weiterer Teiler, so nennt man n eine **Primzahl**.

Die ersten Primzahlen lauten

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$$

Primzahlzwillinge: $\{3, 5\}$, $\{5, 7\}$, $\{11, 13\}$, $\{17, 19\}$, $\ldots$?

Primzahlzerlegung einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$

Satz: Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ läßt sich als Produkt von Primzahlpotenzen schreiben,

$$\begin{aligned} n &= p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k} \\ p_j &: \text{ Primzahl}, \quad r_j \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Beweis: Setze folgende Aussageformen

$$\tilde{A}(n) \;:\Leftrightarrow\; \forall\, k \in \{1, \ldots, n\} \;:\; A(k) \quad \text{(Primzahlzerlegung der Zahl } k\text{)}$$

Induktionsanfang: $1 = 2^0$

Induktionsschluss:

Ist $n + 1$ eine Primzahl, so ist Behauptung mit $n + 1 = (n + 1)^1$ klar.

Ist $n+1$ keine Primzahl, so gibt es $k, m \in \{2, 3, \ldots, n\}$ mit $n+1 = k \cdot m$.

$\Rightarrow n + 1$ besitzt Primzahlzerlegung, da k und m eine besitzen.

Definition: Für zwei natürliche Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ nennt man

$$\text{ggT}(n,m) := \max\{k \mid k \text{ teilt } n \text{ und } m\}$$

den **größten gemeinsamen Teiler** von n und m,

$$\text{kgV}(n,m) := \min\{k \mid n \text{ und } m \text{ teilen } k\}$$

das **kleinste gemeinsame Vielfache** von n und m.

Gilt etwa

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k} \qquad m = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{s_k}$$

so folgt

$$\begin{aligned} \text{ggT}(n,m) &= p_1^{\min(r_1,s_1)} \cdot p_2^{\min(r_2,s_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min(r_k,s_k)} \\ \text{kgV}(n,m) &= p_1^{\max(r_1,s_1)} \cdot p_2^{\max(r_2,s_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max(r_k,s_k)} \end{aligned}$$

Beispiel: Nehme

$$\begin{aligned} n &= 525 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \\ m &= 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{ggT}(525, 180) &= 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 15 \\ \text{kgV}(525, 180) &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 6300 \end{aligned}$$

und

$$n \cdot m = 525 \cdot 180 = 15 \cdot 6300 = \text{ggT} \cdot \text{kgV}$$

Folgerung: Es gilt

$$\text{ggT}(n,m) \cdot \text{kgV}(n,m) = n \cdot m$$

Verfahren der iterierten Division (Euklidischer Algorithmus)
Wir setzen

$$r_0 := n \qquad r_1 := m$$

und führen folgende Iteration durch

für $j = 1, 2, \ldots$

$$r_{j-1} = q_j \cdot r_j + r_{j+1} \quad (0 \leq r_{j+1} < r_j)$$

Da $r_0 > r_1 > r_2 > \ldots$, gibt es ein $r_{k+1} = 0$ (Iterationsabbruch) und

$$r_k = \text{ggT}(n, m)$$

Beispiel: Sei $n = 3054$ und $m = 1002$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3054 & = & 3 & \cdot & 1002 & + & 48 \\ 1002 & = & 20 & \cdot & 48 & + & 42 \\ 48 & = & 1 & \cdot & 42 & + & 6 \\ 42 & = & 7 & \cdot & \boxed{6} & + & 0 \end{array}$$

Bemerkung: $\mathbb{Z}$–Kombination des ggT(n, m) von n und m

Lese Euklidischen Algorithmus

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3054 & = & 3 & \cdot & 1002 & + & 48 \\ 1002 & = & 20 & \cdot & 48 & + & 42 \\ 48 & = & 1 & \cdot & 42 & + & \boxed{6} \end{array}$$

rückwärts nach der letzten Spalte

$$\begin{aligned} 6 &= 48 - 1 \cdot 42 \\ &= 48 - 1 \cdot (1002 - 20 \cdot 48) = 21 \cdot 48 - 1002 \\ &= 21 \cdot (3054 - 3 \cdot 1002) - 1002 \\ &= 21 \cdot 3054 - 64 \cdot 1002 \end{aligned}$$

Die $\mathbb{Z}$–Kombination ist gegeben durch

$$\text{ggT}(3054, 1002) = 6 = 21 \cdot 3054 - 64 \cdot 1002$$

2.2 Reelle Zahlen

Erweiterung des Zahlenbereichs der natürlichen Zahlen

- Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

- Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Wie definieren wir den Zahlenbereich $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen?

Verwende ein

Axiomensystem zur Definition reeller Zahlen

(I) Regeln der Addition (Abelsche Gruppe)

$$\begin{array}{llll}
\text{(a)} & x + (y + z) & = & (x + y) + z \\
\text{(b)} & x + y & = & y + x \\
\text{(c)} & x + 0 & = & 0 + x & = & x \\
\text{(d)} & x + (-x) & = & (-x) + x & = & 0
\end{array}$$

(II) Regeln der Multiplikation

$$\begin{array}{llllll}
\text{(a)} & x \cdot (y \cdot z) & = & (x \cdot y) \cdot z \\
\text{(b)} & x \cdot y & = & y \cdot x \\
\text{(c)} & x \cdot 1 & = & 1 \cdot x & = & x \\
\text{(d)} & x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) & = & \left(\frac{1}{x}\right) \cdot x & = & 1 \quad (x \neq 0)
\end{array}$$

(III) Distributivgesetz (Regeln (I)–(III): Körper)

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

(IV) Ordnungseigenschaften

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} & x \le y \ \lor \ y \le x \\
\text{(b)} & x \le x \\
\text{(c)} & x \le y \ \land \ y \le x \ \Rightarrow \ x = y \\
\text{(d)} & x \le y \ \land \ y \le z \ \Rightarrow \ x \le z \\
\text{(e)} & x \le y \ \Rightarrow \ x + z \le y + z \\
\text{(f)} & x \le y \ \land \ z \ge 0 \ \Rightarrow \ x \cdot z \le y \cdot z
\end{array}$$

(V) Vollständigkeitsaxiom (Dedekind, 1872)

Sei $\mathbb{R}$ zerlegt: $\mathbb{R} = L \cup R$ ($L, R \neq \emptyset$) und $\forall x \in L, y \in R: \ x < y$. Dann gibt es genau eine **Schnittzahl** $s \in \mathbb{R}$ mit :

$$\forall\, x \in L,\ y \in R: \quad (x \le s \le y)$$

Bemerkung: Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erfüllt nicht das Vollständigkeitsaxiom (V). Denn für

$$\begin{aligned}
L &:= \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2 \ \lor \ x < 0\} \\
R &:= \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2 \ \land \ x > 0\}
\end{aligned}$$

gibt es keine Schnittzahl. Diese wäre $x = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Weitere Regeln beim Rechnen mit Ungleichungen (aus Axiomen (IV))

$$\begin{array}{ll}
(1) & x \le y \Rightarrow -x \ge -y \\
(2) & x \le y \land z \le 0 \Rightarrow x \cdot z \ge y \cdot z \\
(3) & x^2 \ge 0 \\
(4) & x \le y \land u \le v \Rightarrow x + u \le y + v \\
(5) & 0 \le x \le y \land 0 \le u \le v \Rightarrow x \cdot u \le y \cdot v
\end{array}$$

Definition: Zu $a \in \mathbb{R}$ heißt

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

der **Betrag** von a.

$|a-b|$ = (nichtnegative) Abstand der Zahlen a, b auf der Zahlengerade.

Eigenschaften:

(1) $|a| \geq 0$

(2) $|a| = 0 \Rightarrow a = 0$

(3) $|ab| = |a|\,|b|$

(4) $|a+b| \leq |a| + |b|$ **(Dreiecksungleichung)**

(5) $U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x-a| < \varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0)$

$= (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ **(ε–Umgebung von a)**