Aufgabe 1:

a) Man berechne $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+1}{2n^2-n-7}\right)^3$.

b) Man untersuche die rekursiv gegebene Folge

$$b_1 = 3\,, \quad b_{n+1} = \sqrt{3b_n - 2}\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

c) Warum konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$?

Wie groß ist der Fehler maximal, wenn man anstelle des Grenzwertes S der Reihe die Partialsumme S_0 verwendet?

d) Man bestimme $a, b \in \mathbb{R}$ so, daß

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{für} \quad 0 < x < \infty\,, \\ ax + b & \text{für} \quad -\infty < x < 0 \end{cases}$$

differenzierbar wird und skizziere dann f.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die durch

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$$

definierte reellwertige Funktion.

a) Man gebe den maximalen Definitionsbereich von f an.

b) Man untersuche f auf Symmetrie.

c) Man berechne alle Nullstellen von f.

d) Man untersuche das Verhalten von f im Unendlichen und ermittle die Asymptote.

e) Im Definitionsbereich gebe man das Monotonieverhalten von f an.

f) Man bestimme alle lokalen Extrema von f.

g) Man berechne das Taylor-Polynom $T_1(x; x_0)$ von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.