Analysis I

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

5. Februar 2008

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben $\longrightarrow$ http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/0708/index.html**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/0708/index.html

Buch Kap. 2.11 – Newton-Verfahren

Satz 2.25: (Newton-Verfahren) Sei $f : I := [x_0 - r, x_0 + r] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Diese erfülle $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Weiterhin existiere eine reelle Zahl $0 < K < 1$, mit

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\right| \leq K \qquad \text{für alle } x \in I$$

und es gelte

$$\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right| \leq (1-K)r.$$

Dann besitzt f genau eine Nullstelle $\bar{x}$ in $I = [x_0 - r, x_0 + r]$.

Buch Kap. 2.11 – Newton-Verfahren

Satz 2.25: (Newton-Verfahren, Iterationsvorschrift) Die Nullstelle $\bar{x}$ in $I = [x_0 - r, x_0 + r]$ ist Grenzwert der Newton-Folge

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0,1,2,\dots),$$

welche für jeden Startwert $x_0 \in I$ quadratisch gegen $\bar{x}$ konvergiert, d.h., es gilt

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \le C|x_n - \bar{x}|^2 \text{ für alle } n = 0,1,2,\dots$$

mit einer Konstanten $C > 0$. Außerdem ist die Fehlerabschätzung

$$|x_n - \bar{x}| \le \frac{|f(x_n)|}{M} \quad \text{mit } 0 < M = \min_{x \in I} |f'(x)|$$

erfüllt.

Buch Kap. 2.11 – Newton-Verfahren

Satz 2.26:(Newton für Nullstellen konvexer Funktionen)

Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und konvex (d.h. $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$). Ferner gelte $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und die Vorzeichen von $f(a)$ und $f(b)$ seien verschieden.

Dann besitzt f genau eine Nullstelle $\bar{x} \in [a, b]$.

Die Newton-Folge (x_n) verbleibt in dem Intervall $[a, b]$ und konvergiert gegen $\bar{x}$, falls der Startwert x_0 wie folgt gewählt wird:

- **$x_0 \in [a, \bar{x}]$, falls $f(a) > 0$ (also etwa $x_0 = a$),**
- **$x_0 \in [\bar{x}, b]$, falls $f(a) < 0$ (also etwa $x_0 = b$).**

Buch Kap. 2.11 – Newton-Verfahren, konvexe Funktionen

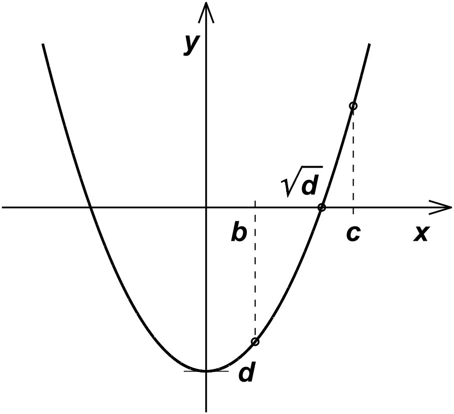


Abbildung 2.41: Wahl eines Intervalls für das Newton-Verfahren

Buch Kap. 2.18 – Interpolation

Gegeben: Datenpaare $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$.

Gesucht: Möglichst einfaches Datenmodell in Form einer Funktion $p(x)$, welches

$$p(x_i) = f_i \text{ für } i = 0, \dots, n$$

erfüllt.

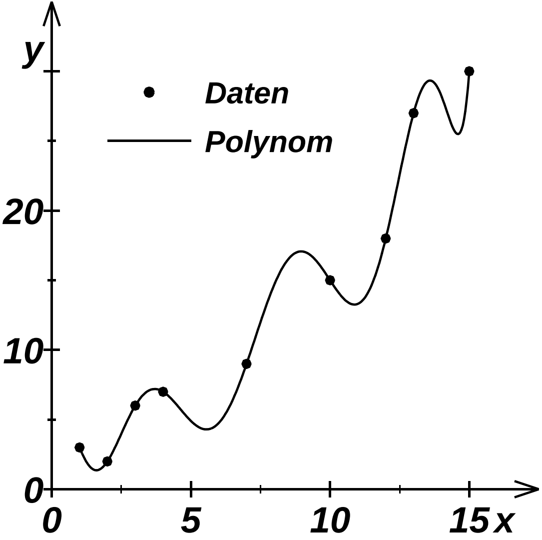
Hintergrund: Die Werte f_i $(i = 0, \dots, n)$ stammen häufig selber von einer i.d.R. unbekannten Funktion $f(x)$, die es zu modellieren gilt.

Ansatz: Polynom $n-$ten Grades

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Gesucht: Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Buch Kap. 2.18 – Interpolation



Interpolation mit Polynom 8ten Grades

Buch Kap. 2.18 – Interpolation

Hintergrund: Die Werte f_i ($i = 0, \dots, n$) stammen häufig selber von einer i.d.R. unbekannten Funktion $f(x)$, die es zu modellieren gilt.
Ansatz: Polynom $n-$ten Grades

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

Gesucht: Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$.
Lösung: $p(x_i) = f_i$ für $i = 0, \dots, n$ gdw

$$\begin{pmatrix} 1 x_0 x_0^2 \dots x_0^n \\ 1 x_1 x_1^2 \dots x_1^n \\ \dots \\ 1 x_n x_n^2 \dots x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem mit regulärer Koeffizientenmatrix, falls alle x_i paarweise verschieden.

Buch Kap. 2.18 – Interpolation

Verbesserter Ansatz: Nutze Kenntnis von $x_0, \dots, x_n$ aus!
Ansatz: Polynom $n-$ten Grades

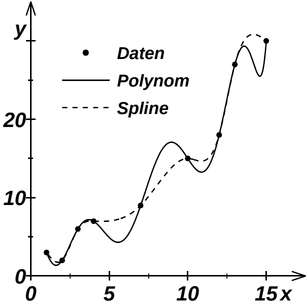
$$p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \\ + b_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

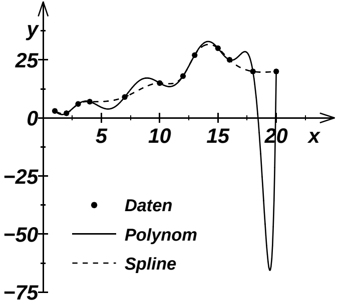
Gesucht: Koeffizienten $b_0, b_1, \dots, b_n$. Lösung:

$$\begin{aligned}
f_0 &= p(x_0) = b_0 \\
f_1 &= p(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0) \\
f_2 &= p(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\
&\dots \\
f_n &= p(x_n) = b_0 + b_1(x_n - x_0) + b_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \cdots + \\
&\quad + b_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})
\end{aligned}$$

Gestaffeltes lineares Gleichungssystem; Berechne zuerst b_0, mit dessen Kenntnis b_1, mit dessen Kenntnis b_2 uswusf bis b_n.

Buch Kap. 2.18 – Vor-/Nachteile Interpolation





Links: Abb. 2.70: Kubischer interpolierender Spline und Interpolationspolynom 8. Grades.

Rechts: Abb. 2.71: Kubischer interpolierender Spline und Interpolationspolynom 11. Grades