Korrektur

In Satz 2.24 lautet die a-posteriori Fehlerabschätzung doch

$$|x_n - \bar{x}| \le \frac{1}{1-K} |x_{n+1} - x_n| .$$

Die Folien zur VL 220108 sind bereits entsprechend korrigiert.

Bsp Fixpunkt Iteration

$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}$ $\quad I = [0,1]$

Frage: Besitzt f in I einen (eindeutigen) Fixpunkt $\bar{x}$?

Zeige: i.) $f(I) \subset I$ ✓

weil $f(0) = \frac{1}{5}$, $f(1) = \underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}_{<1}$

und f monoton wachsend.

ii) f Kontraktion auf I, d.h.

$$|f(x_1) - f(x_2)| \overset{!}{\leq} K\,|x_1 - x_2|$$

für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $0 \leq K < 1$

MWS: $|f(x_1) - f(x_2)| = \underbrace{|f'(s)|}\,|(x_1 - x_2)|$

mit $s \in (x_1, x_2)$ $\quad \leq \underbrace{\max_{s \in I} |f'(s)|}_{\text{Kandidat für } K}$

Hier
$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2$$
$$\Rightarrow \max_{\xi\in[0,1]} |f'(\xi)| = \frac{3}{4} < 1$$

Damit
$$|f(x_1)-f(x_2)| \leq \frac{3}{4}|x_1-x_2| \quad \forall_{x_1,x_2\in I}$$

d.h. $K = \frac{3}{4}$

Damit alle Voraussetzungen des Fixpunktsatzes erfüllt;

i.) $\exists!\ \bar{x} \in I : f(\bar{x}) = \bar{x}$

ii) $x^0 \in I$; $x^{n+1} := f(x^n)$

mit $n\in\mathbb{N}$ konvergiert mit

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \bar{x}$$

iii) a.) $|x^n - \bar{x}| \leq \frac{K^n}{1-K}|x^1 - x^0|$

hier muß eine "1" stehen

b.) $|x^n - \bar{x}| \leq \frac{\cancel{K}\,1}{1-K}|x^{n+1} - x^n|$

$x^0 := \frac{1}{2}$ $\qquad x^1 = f(x^0) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}$

$= 0.23125$

$x^2 = 0.203091$

$\vdots$

$x^6 = 0.202062517$

anders als in VL

$$|x^5 - \bar{x}| \leq \frac{\cancel{3/4}\; 1}{1 - 3/4} |x^6 - x^5|$$

a-posteriori $\sim 10^{-8}$

$$|x^6 - \bar{x}| \leq \frac{(3/4)^6}{1 - 3/4} |x^1 - x^0|$$

a-priori ~ 0.19

"Worst-Case" Analyse

<u>Frage</u>: Wieviele Iterationen n sind notwendig, um $|x^n - \bar{x}| \leq \varepsilon$ zu gewährleisten, wobei $\varepsilon > 0$ eine vorgegebene Genauigkeit bezeichnet?

A-priori Fehlerabschätzung

$$|x^n - \bar{x}| \le \frac{K^n}{1-K} |x^1 - x^0|$$

<u>Idee</u>: n so, daß

$$\frac{K^n}{1-K} |x^1 - x^0| \le \varepsilon$$

$$\rightarrow \qquad n \ge \left(\ln \frac{\varepsilon (1-K)}{|x^1 - x^0|} \right) / \ln K$$

<u>Beweisskizze Fixpunktsatz</u>

<u>Vor.</u>: i.) $f : I \to I$, $f(I) \subset I$

ii) $|f(x_1) - f(x_2)| \le \underbrace{K}_{<1} |x_1 - x_2|$

Existenz von $\bar{x}$ mit $\bar{x} = f(\bar{x})$

Betrachte zu $x^0 \in I$

$$x^{n+1} = f(x^n) \qquad , n \in \mathbb{N}$$

290108 ⑤

<u>Idee</u>: zeige, daß (x^n) eine Cauchy-Folge definiert, d.h.

$$|x^n - x^m| \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

Dazu beachte

$$|x^{n+1} - x^n| = |f(x^n) - f(x^{n-1})|$$
$$\leq K \underbrace{|x^n - x^{n-1}|}_{|f(x^{n-1}) - f(x^{n-2})|}$$
$$\leq K^2 \underbrace{|x^{n-1} - x^{n-2}|}_{|f(x^{n-2}) - f(x^{n-3})|}$$
$$\vdots$$
$$\leq K^n |x^1 - x^0|$$

2. Schritt

$$|x^n - x^m| = |x^n - x^{n-1} + x^{n-1} - x^{n-2} + - \dots + - \dots x^{m+1} - x^m|$$

$\rightarrow$

$$|x^n - x^m| \leq |x^n - x^{n-1}| + |x^{n-1} - x^{n-2}| + \dots + |x^{m+1} - x^m|$$

$n > m$, hier $n = m + l$ 290108

Damit

$$|x^n - x^{n-1}| \leq K^{l-1} |x^{m+1} - x^m|$$
$$|x^{n-1} - x^{n-2}| \leq K^{l-2} |x^{m+1} - x^m|$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$|x^{m+1} - x^m| \leq K^0 |x^{m+1} - x^m|$$

Damit

$$|x^n - x^m| \leq \overbrace{\underbrace{(K^{l-1} + K^{l-2} + \ldots + \underbrace{K^0}_{=1})}_{\text{geometrische Reihe}}}^{= \frac{1-K^l}{1-K}} |x^{m+1} - x^m|$$

$$\leq \frac{1}{1-K} \underbrace{|x^{m+1} - x^m|}_{\leq K^m |x^1 - x^0|}$$

Also

$$|x^n - x^m| \leq \underbrace{\frac{K^m}{1-K} |x^1 - x^0|}_{\to 0 \ (m \to \infty)}$$

$\Rightarrow$ (x^n) Cauchy-Folge

<u>Also</u>: $\lim\limits_{n\to\infty} x^n =: \bar{x} \in I$

<u>Zeige</u>: $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Es gilt

$$x^{n+1} = f(x^n)$$

$$n\to\infty \ \downarrow \qquad \downarrow \ n\to\infty$$

$$\bar{x} = f(\bar{x}) \quad f \text{ stetig!}$$

Eindeutigkeit von $\bar{x}$:

IA $\bar{x} \neq \bar{\bar{x}}$ Fixpunkte, d.h.

$$\bar{x} = f(\bar{x}) \quad \text{und} \quad \bar{\bar{x}} = f(\bar{\bar{x}})$$

Dann

$$|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| = |f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}})|$$

$$\leq K\,|\bar{x} - \bar{\bar{x}}|$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1-K)}_{>0}\,\underbrace{|\bar{x} - \bar{\bar{x}}|}_{>0} \leq 0 \quad \lightning$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \bar{\bar{x}}$$

Nullstellenberechnung wiederbesucht

$$g(x) = 0$$

Newton - Verfahren $\qquad x^0$ gegeben

$$x^{n+1} = x^n - \frac{g(x^n)}{g'(x^n)}$$

Fixpunkt - Iteration für

$$x - \frac{g(x)}{g'(x)} =: f(x)$$