Analysis I

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

Universität Hamburg

29. Januar 2008

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben $\longrightarrow$ http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/0708/index.html**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

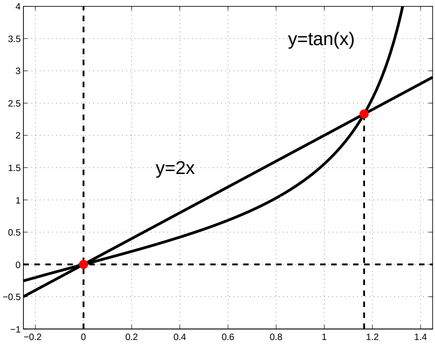
Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/0708/index.html

Buch Kap. 2.11 – Beispiele Fixpunkt Iteration

Suche im Intervall $(0, \pi/2)$ die (eindeutige) Nullstelle von

$$f(x) = 2x - \tan(x).$$



Lösungsmöglichkeiten:

- **Iteration mit $x = \frac{1}{2}\tan x = \Phi_1(x)$**
- **Iteration mit $x = \arctan(2x) = \Phi_2(x)$**

Buch Kap. 2.11 – Beispiele Fixpunkt Iteration

- **Betrachte Iterationen**

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\tan(x_k) \quad \text{und} \quad y_{k+1} = \arctan(2y_k)$$

- **Wähle als Anfangsnäherung in beiden Iterationen**

$$x_0 = 1{,}2 \quad \text{und} \quad y_0 = 1{,}2$$

- **Beide Iterationen konvergieren im Grenzwert für $k \to \infty$, aber**

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} y_k = 1{,}165561185$$

- **Berechnung der Iterationen mittels eines Computerprogramms**

Buch Kap. 2.11 – Newton-Verfahren

Satz 2.25: (Newton-Verfahren) Sei $f : I := [x_0 - r, x_0 + r] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Diese erfülle $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Weiterhin existiere eine reelle Zahl $0 < K < 1$, mit

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\right| \leq K \qquad \text{für alle } x \in I$$

und es gelte

$$\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right| \leq (1 - K)r.$$

Dann besitzt f genau eine Nullstelle $\bar{x}$ in $I = [x_0 - r, x_0 + r]$.

Buch Kap. 2.11 – Newton-Verfahren

Satz 2.25: (Newton-Verfahren, Iterationsvorschrift) Die Nullstelle $\bar{x}$ in $I = [x_0 - r, x_0 + r]$ ist Grenzwert der Newton-Folge

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0,1,2,\dots),$$

welche für jeden Startwert $x_0 \in I$ quadratisch gegen $\bar{x}$ konvergiert, d.h., es gilt

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq C|x_n - \bar{x}|^2 \text{ für alle } n = 0,1,2,\dots$$

mit einer Konstanten $C > 0$. Außerdem ist die Fehlerabschätzung

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{|f(x_n)|}{M} \quad \text{mit } 0 < M = \min_{x \in I} |f'(x)|$$

erfüllt.

Buch Kap. 2.11 – Newton-Verfahren

Satz 2.26:(Newton für Nullstellen konvexer Funktionen)

Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und konvex (d.h. $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$). Ferner gelte $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und die Vorzeichen von $f(a)$ und $f(b)$ seien verschieden.

Dann besitzt f genau eine Nullstelle $\bar{x} \in [a, b]$.

Die Newton-Folge (x_n) verbleibt in dem Intervall $[a, b]$ und konvergiert gegen $\bar{x}$, falls der Startwert x_0 wie folgt gewählt wird:

- **$x_0 \in [a, \bar{x}]$, falls $f(a) > 0$ (also etwa $x_0 = a$),**
- **$x_0 \in [\bar{x}, b]$, falls $f(a) < 0$ (also etwa $x_0 = b$).**