Nullstellenberechnung

Motivation: Finde Stellen x_0, x_0', x_0'' mit

$$f(x_0) = 0$$

$$f'(x_0') = 0$$

$$f''(x_0'') = 0$$

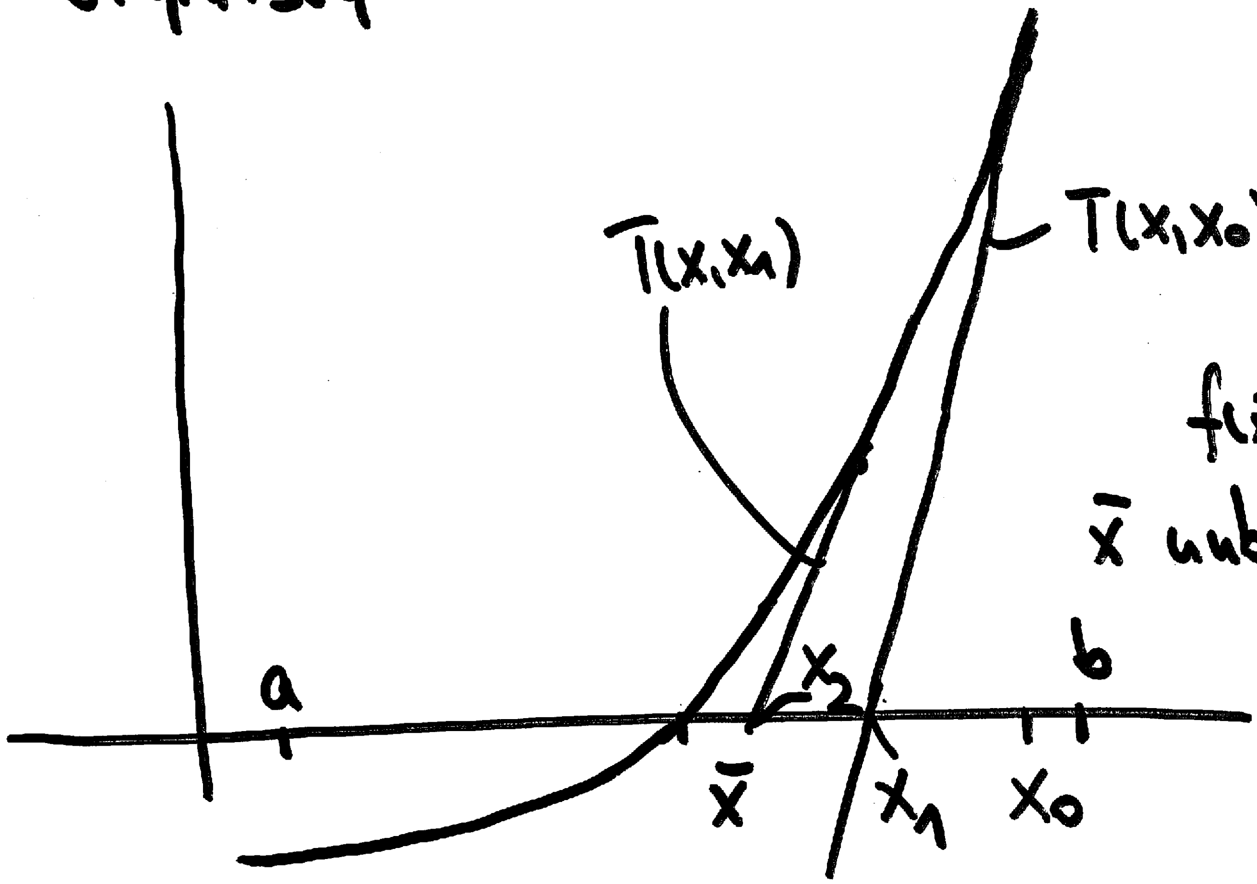
Lineares Modell $\quad f$ 1 mal diffbar

$$f(x) = \overbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)} + R_1(x)$$

mit $R_1(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x-x_0)^2$ mit $\xi \in (x_0, x)$, falls f 2 mal diffbar

<u>Idee</u>: Anstelle von $f(x) = 0$ betrachte $T(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = 0$

graphisch



$f(\bar{x})=0$, $\bar{x}$ unbekannt

$f(a)\cdot f(b)<0 \longrightarrow \exists\, \bar{x}\in(a,b) : f(\bar{x})=0$

2te Idee: Nullstelle von $T(x,x_0)$, diese heiße x_1, ist gute Näherung an $\bar{x}$, falls x_0 in der Nähe von $\bar{x}$

Bestimme x_1 aus $T(x_1,x_0)=0$:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

<u>Dritte Idee</u>: Iteriere dieses Vorgehen, d.h. ersetze x_0 durch x_1 und $T(x,x_0)$ durch $T(x,x_1)$. Das ergibt mit

$$T(x_2, x_1) = 0$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

bzw für $n \in \mathbb{N}$

$$T(x_{n+1}, x_n) = 0$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

(Newton-Verfahren)

A: (x_n) konvergiere. Dann

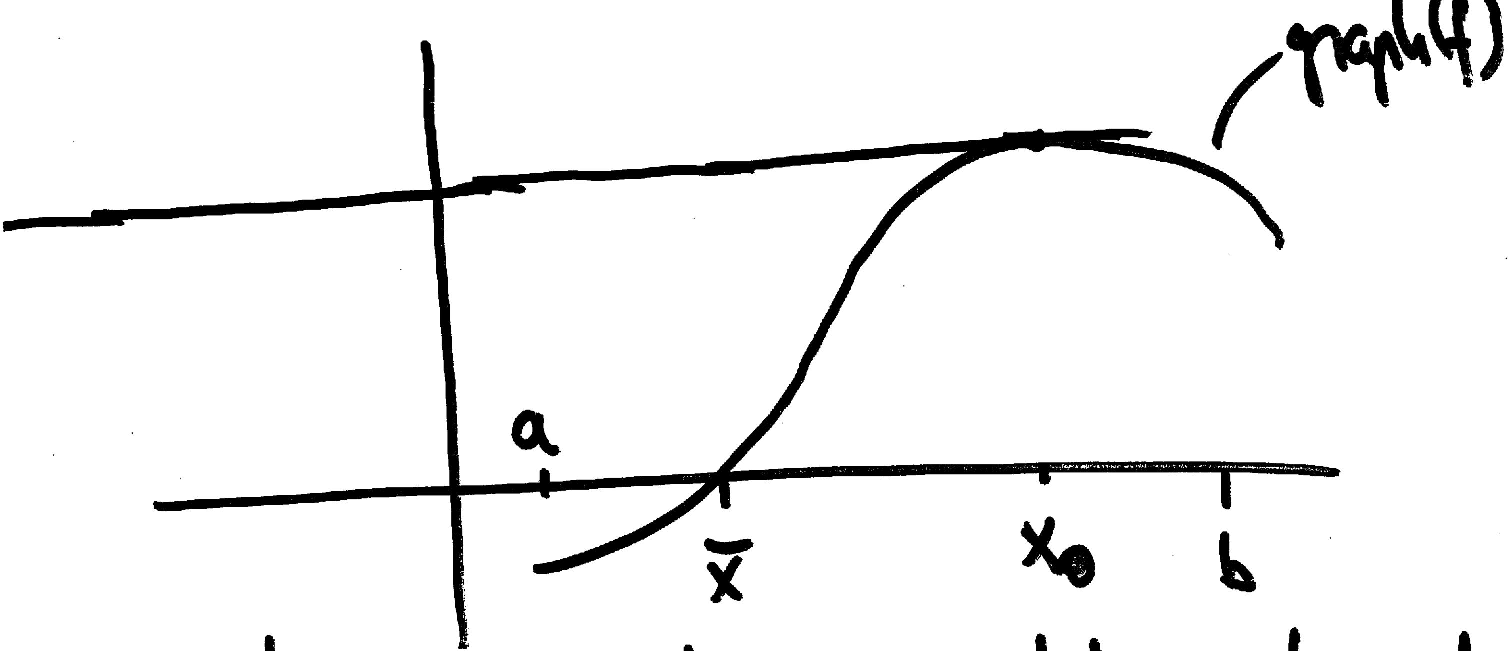
$$\bar{x} \leftarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \longrightarrow \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$$

D.h.

$$\bar{x} = \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$$

gdw $\quad f(\bar{x}) = 0 \quad$, falls $f'(\bar{x}) \neq 0$

<u>Beachte</u>: Newton Verfahren nur dann durchführbar, wenn $f'(x_n) \neq 0$ für alle x_n



Beachte: Newton-Verfahren basiert auf Lösung von

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} =: g(x)$$

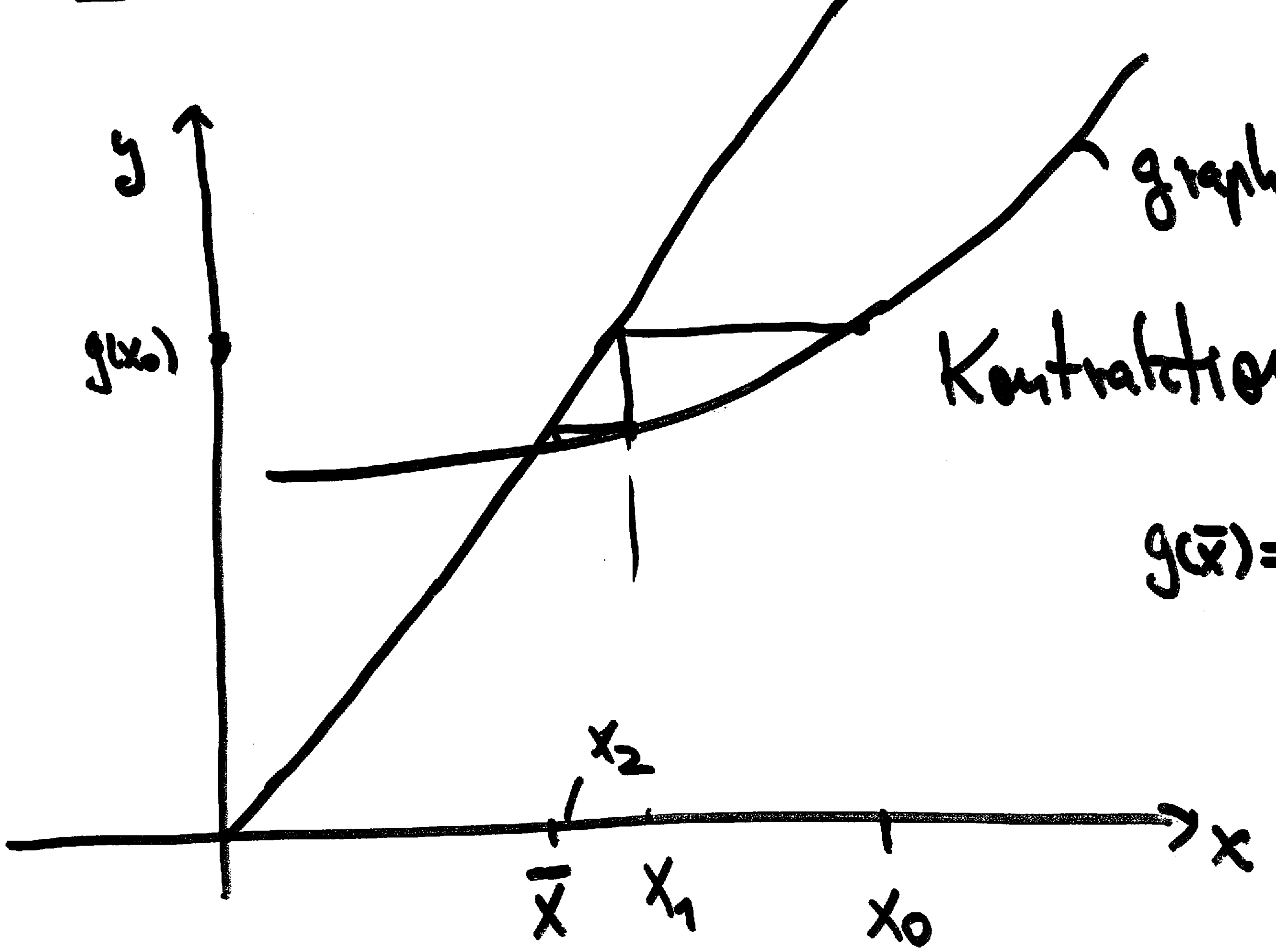
Fixpunkt Gleichung

$$x = g(x)$$

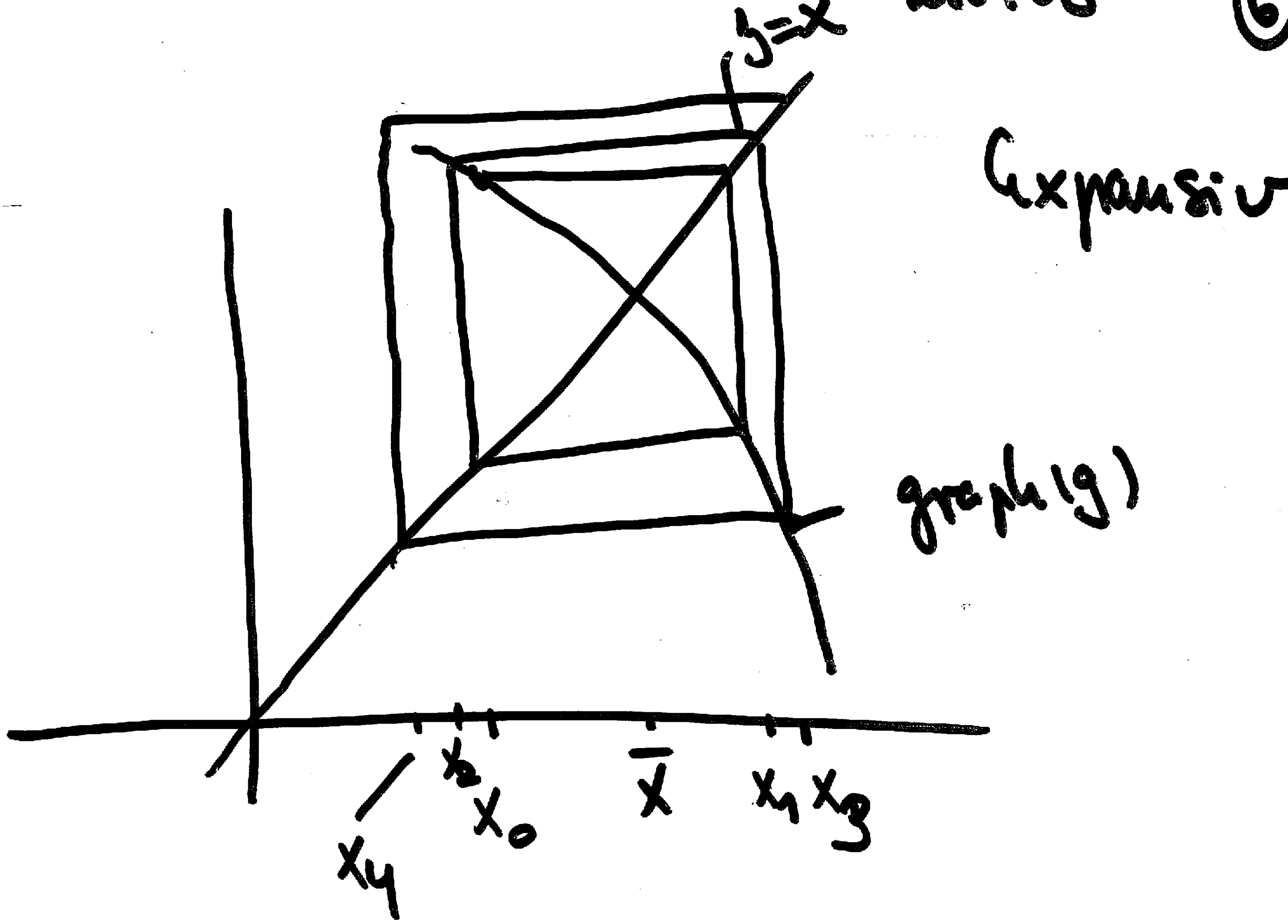
mit Fixpunktiteration x_0 gegeben

$$x_{n+1} = g(x_n) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

<u>Graphisch</u>



$$x_1 = g(x_0) \quad , \qquad x_n = g(x_{n-1})$$



$x_n = g(x_{n-1})$ konvergiert nicht

Konvergenz Fixpunkt Iteration

$g : I \longrightarrow I$ mit $g(I) \subset I$
(Selbstabbildung) und g erfülle

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq K\,|x_1 - x_2|$$

für alle $x_1, x_2 \in I$ mit
<u>Kontraktionskonstante $0 \leq K < 1$</u>

Dann

i.) besitzt g einen Fixpunkt $\bar{x} \in I$, d.h. es gibt $\bar{x} \in I$ mit

$$g(\bar{x}) = \bar{x}$$

ii) Für jeden Startwert $x_0 \in I$ konvergiert die Folge

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

gegen $\bar{x}$

iii) $\bar{x}$ ist eindeutig bestimmt

iv.) Fehlerabschätzungen

a.) $$|\bar{x} - x_m| \leq \frac{K^m}{1-K} |x_1 - x_0|$$

a-priori

b.) $$|\bar{x} - x_m| \leq \frac{1}{1-K} |x_{m+1} - x_m|$$

a-posteriori

Bsp: $g(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}$, $I = [0,1]$

Prüfe: $|g(x_1) - g(x_2)| \leq K |x_1 - x_2|$

Mittelwertsatz

$$g(x_1) - g(x_2) = g'(\xi)(x_1 - x_2)$$

mit $\xi \in (x_1, x_2)$.

Hier:

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq \underbrace{\max_{\xi \in [0,1]} |g'(\xi)|}_{\leq \frac{3}{4}} |x_1 - x_2|$$

Damit $K = \frac{3}{4} < 1$