Regeln von Bernoulli – L'Hospital

Grenzwerte "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = ? \quad \text{falls } g(x_0) = 0, \; f(x_0) = 0$$

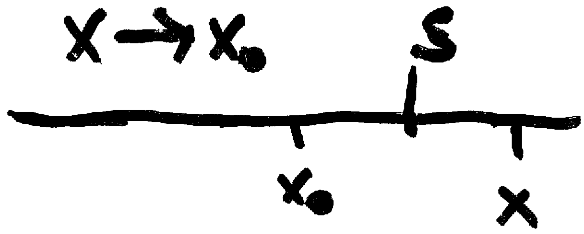
VA: $f'(x) \neq 0$ in $U(x_0)$.

Dann

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(x) - g(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \overset{\text{verallg. MWS}}{=} \frac{g'(\xi)}{f'(\xi)}$$

mit ξ zwischen x und x_0

und $\xi \to x_0$, falls $x \to x_0$



$\longrightarrow$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g'(\xi)}{f'(\xi)} = \frac{g'(x_0)}{f'(x_0)}$$

Bspe

080108 ②

i.) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{ax}}{x} = "\frac{\infty}{\infty}"$, $a>0$

$\overset{\shortparallel}{\lim\limits_{x\to\infty}} \frac{a e^{ax}}{1} = \infty$ anders als in Vorlesung!

allgemeiner gilt $(\alpha > 0)$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{ax}}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{e^{\frac{a}{\alpha}x}}{x}\right)^\alpha$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{a}{\alpha} e^{\frac{a}{\alpha}x}}{1}\right)^\alpha = \infty$$

Merke: Exponentialfunktion wächst stärker als jede Potenz

ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = "\frac{\infty}{\infty}"$ $\alpha > 0$

$\overset{\shortparallel}{\lim\limits_{x\to\infty}} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$

Merke: Logarithmus wächst langsamer als jede Potenz

iii) $\alpha > 0$

$$\lim_{x \to 0+0} x^{\alpha} \ln x = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha\, x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{-\alpha}} = 0$$

Damit

$$\lim_{x \to 0} x^{x} = \lim_{x \to 0} e^{x \ln x}$$

$$= e^{\lim_{x \to 0} x \ln x} = e^{0} = 1$$

iv). $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$\overset{\text{"}}{\lim_{x \to 0}} \frac{\cos x}{1} = 1 \checkmark$$

v.) $$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{-2+3\cos^2 x}$$

$$= 2$$

vi) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\sqrt{1-\cos x}} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2}\sqrt{1-\cos x}\,\cos x}{\sin x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

Hier hilft Bernoulli - L'Hospital nicht weiter

Ausweg: Lineares Modell

$\cos x = \underbrace{1}_{t(x)} + k(x)$ mit $\lim_{x\to 0} \frac{k(x)}{x} = 0$

Bestimmen $k(x)$:

Dazu $-\sin x = \cos' x = k'(x)$

$-\sin x \sim -x$ 080108 5

bei $x=0$

$\Longrightarrow \quad k'(x) \sim -x$

$\Longrightarrow \quad \cancel{k(x)} \; k(x) \sim -\frac{1}{2}x^2$

Damit

$$\cos x = 1 + k(x) \sim 1 - \frac{1}{2}x^2$$

$$\Longrightarrow \sqrt{1-\cos x} \sim \frac{1}{\sqrt{2}}|x|$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\sqrt{1-\cos x}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Taylor – Formel

Idee: Die Verbesserung des linearen Modells

x_0 gegeben

$$f(x) = \overbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}^{t_1(x) \text{ (Tangente)}} + k_1(x)$$

mit $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{k_1(x)}{x-x_0} = 0$

Ansatz:

$$f(x) = \underbrace{t_1(x) + a_2 (x-x_0)^2}_{t_2(x) \text{ (quadratisches Modell)}} + k_2(x)$$

bestimmen!

Forderungen:

i.) f 2 mal diffbar

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{k_2(x)}{(x-x_0)^2} = 0$

Bestimme a_2: Es gilt

$$f'(x) = t_2'(x) + R_2'(x)$$
$$= \underbrace{t_1'(x)}_{f'(x_0)} + 2a_2(x-x_0) + R_2'(x)$$

Andererseits $p(x) := f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0)$ lineares Modell von $f'(x)$ bei x_0,

d.h.

$$f'(x) = p(x) + h(x) \quad \text{mit} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{x-x_0} = 0$$

Also

$$\cancel{f'(x_0)} + 2a_2(x-x_0) + R_2'(x)$$
$$= \cancel{f'(x_0)} + f''(x_0)(x-x_0) + h(x)$$

$$\to \quad 2a_2 + \underbrace{\frac{R_2'(x)}{x-x_0}}_{\to 0\ (x\to x_0)} = f''(x_0) + \underbrace{\frac{h(x)}{x-x_0}}_{\to 0\ (x\to x_0)}$$

L'Hospital

Damit

$$a_2 = \frac{1}{2} f''(x_0),$$

also

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + R_2(x)$$

mit $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_2(x)}{(x-x_0)^2} = 0$

$n \in \mathbb{N}$: f n- diffbar

$$f(x) = \overbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}^{t_n(x)} + R_n(x)$$

mit $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ $\quad t_n$ n-tes Taylor Polynom