Analysis I

Michael Hinze
(zusammen mit Frau Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

18. Dezember 2007

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben $\longrightarrow$ http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/0708/index.html**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/0708/index.html

Buch Kap. 2.7 – Lineare Approximation und Differential

Satz 2.12': (Differenzierbarkeit und das lineare Modell)

Die Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist im Punkt x_0 genau dann differenzierbar, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

gilt, bzw. kürzer mit $k(x) = f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)$

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{k(x)}{x - x_0} = 0.$$

Die Zahl a stimmt mit der Ableitung $f'(x_0)$ an der Stelle x_0 überein, d.m.

$$a = f'(x_0).$$

Buch Kap. 2.7 – Lineare Approximation und Differential

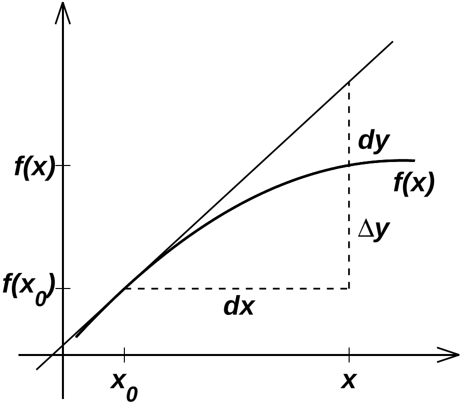

Abbildung 2.32: Funktion und totales Differential *dy*

Buch Kap. 2.7 – Totales Differential

Definition 2.25: (totales Differential)
Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar.

$$dy := f'(x_0)(x - x_0)$$

heißt totales Differential von f bei x_0.
Mit $dx = \Delta x = x - x_0$ für den Zuwachs $\Delta x = x - x_0$ wird auch

$$dy = f'(x_0)dx$$

geschrieben.
Satz 2.13: (totales Differential der unabhängigen Variablen)
Für $f(x) = x$ erhält man an der Stelle x_0

$$dy = dx = x - x_0.$$

dx heißt totales Differential der unabhängigen Variablen x.
Das totale Differential der unabhängigen Variablen ist gleich ihrem Zuwachs.

Satz 2.14: (notwendige Bedingung für absoluten Extremwert)

Sei $f : I := [a, b] \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I definiert und nehme in $x_0 \in I$ einen absoluten Extremwert an (also Maximum oder Minimum). Falls $f'(x_0)$ in den nachfolgenden Fällen existiert, gilt

- **Ist $x_0 \in (a, b)$, so gilt $f'(x_0) = 0$.**
- **Ist $x_0 = a$, so gilt**
  - **$f'(x_0) \leq 0$, falls x_0 Maximalstelle,**
  - **$f'(x_0) \geq 0$, falls x_0 Minimalstelle.**
- **Ist $x_0 = b$, so gilt**
  - **$f'(x_0) \geq 0$, falls x_0 Maximalstelle,**
  - **$f'(x_0) \leq 0$, falls x_0 Minimalstelle.**

Buch Kap. 2.8 – Eigenschaften diffbarer Funktionen

Im Folgenden seien $f, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar.

Satz 2.15: (Satz von Rolle)
Gilt $f(a) = f(b)$, so gibt es mindestens ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = 0.$$

Satz 2.16: (Mittelwertsatz)
Es gibt mindestens ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Satz 2.17: (verallgemeinerter Mittelwertsatz)
Es gelte auf (a, b) überall $h'(x) \neq 0$. Dann existiert ein Punkt $x_0 \in]a, b[$ mit

$$\frac{f'(x_0)}{h'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{h(b) - h(a)}$$