111207 ①

Weierstraß: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

i) f beschränkt

ii) $\exists_{x_0, x_1 \in [a,b]}$: $f(x_0) = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$

$f(x_1) = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$

<u>Nachweis</u> i) RA: f sei nicht beschränkt auf $[a,b]$. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a,b]$ s.d

$$f(x_n) > n$$

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{x_n \in [a,b]} : f(x_n) > n$$

Betrachte $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [a,b]$

Bolzano-Weierstraß: $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = x \in [a,b]$

für eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$

$$\Rightarrow \quad \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x),$$

weil f stetig. Widerspruch zu

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) \geq \lim_{k \to \infty} n_k = \infty$$

$\blacksquare$

ii) f beschränkt nach i), also gibt es

$$S = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

$$i = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$$

Zeige: $\exists_{x_0, x_1} : f(x_0) = i, \quad f(x_1) = S$

Nur für S, i analog

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ex $x_n \in [a,b]$ mit

$$S - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq S$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = S$$

Bolzano Weierstraß

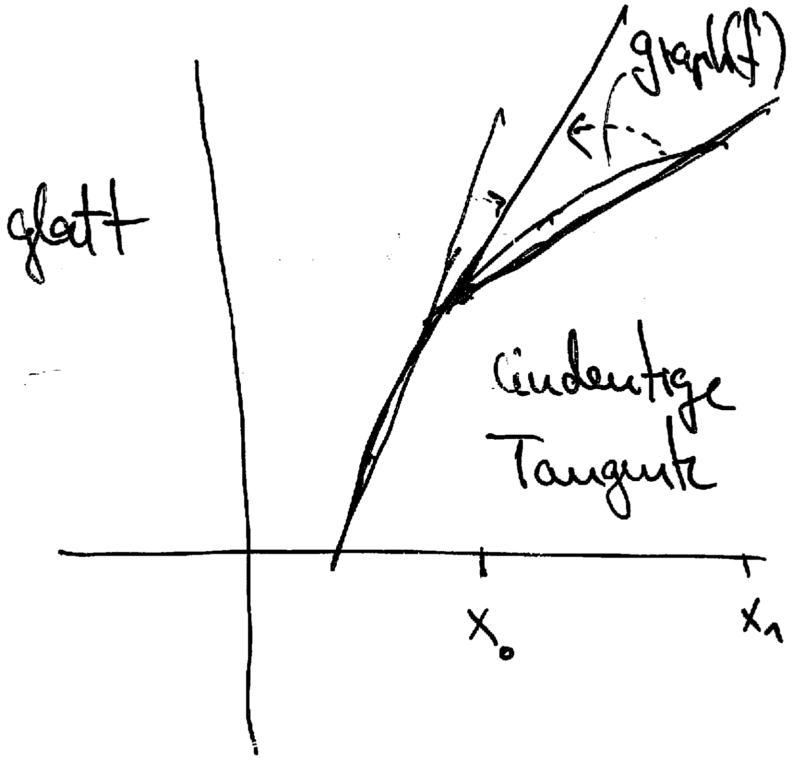
aber $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [a,b] \rightarrow \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = \overline{x}$

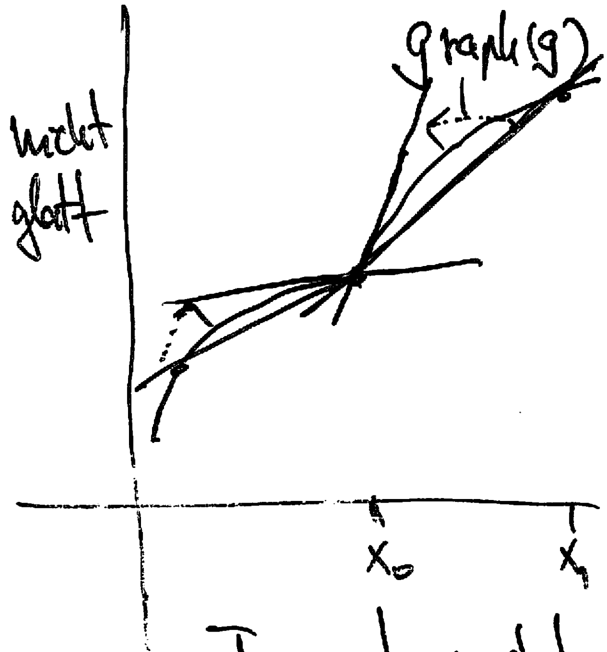
$$\overset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow} \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(\overline{x})$$

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = S$$

Setze $x_1 := \overline{x}$. Dann $f(x_1) = S$

$\blacksquare$

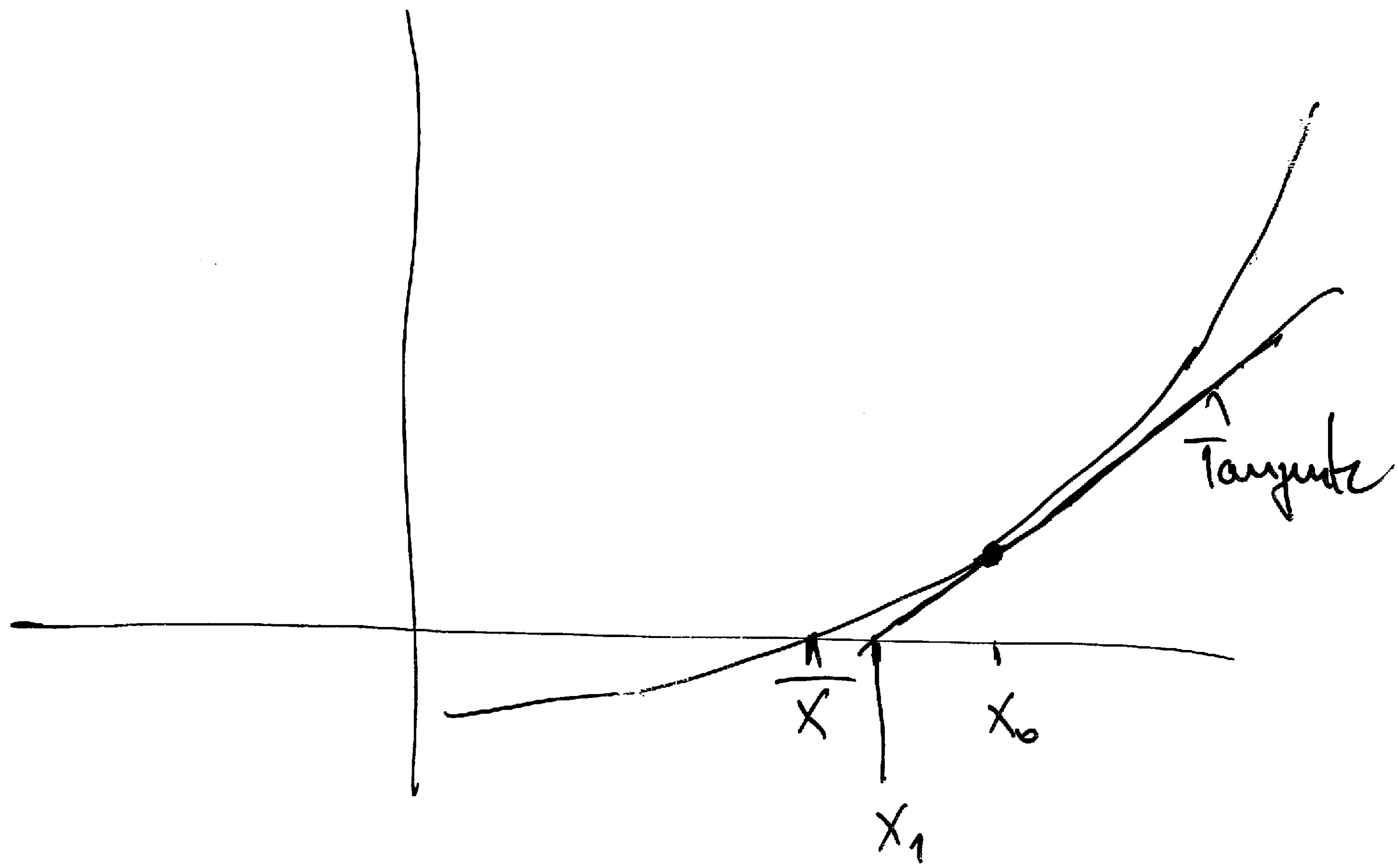




Tangente nicht eindeutig

Sekante durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$

$x_1 \longrightarrow x_0$: Sekante $\longrightarrow$ Tangente



Bsp Differenzieren

i.) $f(x) = \cos x$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x_0 + \Delta x) - \cos x_0}{\Delta x}$$

Add. Theorem

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x_0 \cos \Delta x - \sin x_0 \sin \Delta x - \cos x_0}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\cos x_0 \left(\frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} \right) - \sin x_0 \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos x_0 \left(\frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} \right) - \lim_{\Delta x \to 0} \sin x_0 \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \underbrace{\cos x_0 \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}}_{=0}}_{=0} - \underbrace{\sin x_0 \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}_{=1}}_{-\sin x_0}$$

$$= - \sin x_0$$

Analog: $\sin x_0{}' = \cos x_0$

ii) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} = ?$$

Zunächst

$$\frac{(x_0 + \Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} = \frac{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x_0^{n-j} \Delta x^j - x_0^n}{\Delta x}$$

Dabei benutzt:

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

mit $\binom{n}{j} := \frac{n!}{j!\,(n-j)!}$ Binomialkoeffizient

Damit

$$\frac{(x_0 + \Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} = \binom{n}{1} x_0^{n-1} + \underbrace{\sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} x_0^{n-j} \Delta x^{j-1}}_{\to 0 \ (\Delta x \to 0)}$$

$$\Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} = \binom{n}{1} x_0^{n-1} = n\, x_0^{n-1}$$

$$(x^n)' = n\, x^{n-1}$$

Diffbarkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit

Zeige: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0))$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} (x - x_0)$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) \checkmark$$

Bsp Differenzieren:

1.) $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$

$$(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (x \ln x)'$$

$$= e^{x \ln x} (1 \ln x + x \tfrac{1}{x})$$

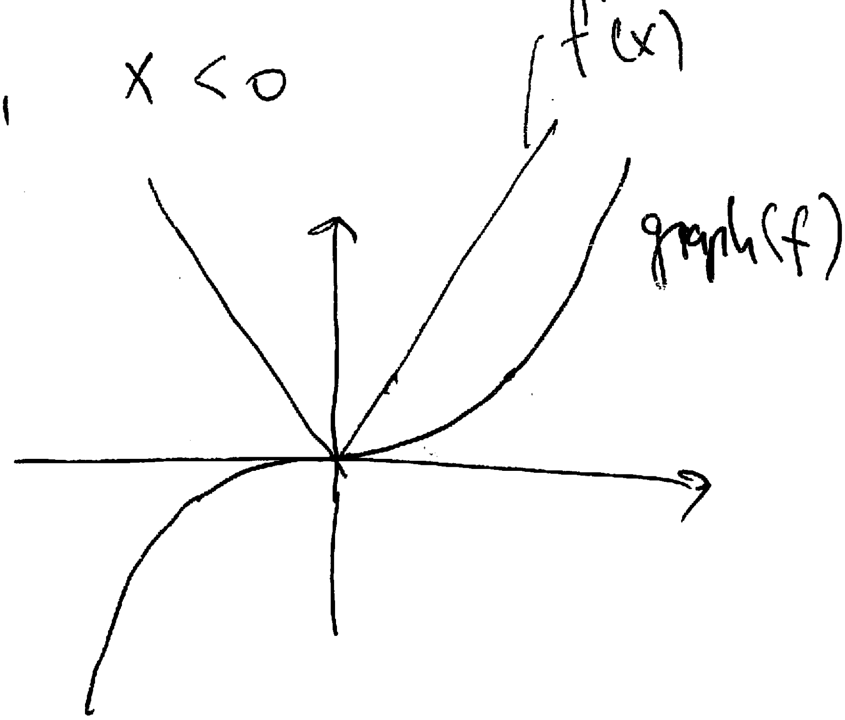
$$= e^{x \ln x} (1 + \ln x)$$

$$= x^x (1 + \ln x)$$

Höhere Diffbarkeit

111207

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$



$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$$ stetig (in 0)

f'' existiert nicht