Analysis I

Michael Hinze
(zusammen mit Frau Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

27. November 2007

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben $\longrightarrow$ http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/0708/index.html**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/0708/index.html

Buch Kap. 2.2 – Konkav und Konvex bei Funktionen

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktion.

Definition 2.6: (konkave und konvexe Funktionen)

f heißt auf dem Intervall $I \subseteq D$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(strikt) konkav} \\ \text{(strikt) konvex} \end{array} \right\}, \text{ falls}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\alpha x + (1-\alpha)y)(>) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \\ f(\alpha x + (1-\alpha)y)(<) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \end{array} \right\}$$

für alle $x, y \in I$ und alle $\alpha \in [0,1]$ erfüllt ist.

Buch Kap. 2.2 – Konkav und Konvex bei Funktionen

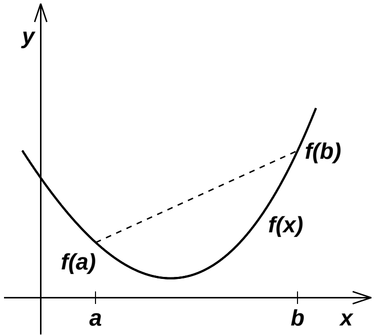

Abb. 2.8 (links): f streng konvex (von unten).
$graph(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ liegt für $a \leq x \leq b$ unterhalb der Geraden durch $(a, f(a)), (b, f(b))$.
Abb. 2.9 (rechts): f streng konkav (von unten). $graph(f)$ liegt für $a \leq x \leq b$ oberhalb der Geraden durch $(a, f(a)), (b, f(b))$.

Buch Kap. 2.2 – Periodische Funktionen

Definition 2.8: (periodische Funktion)

Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt periodisch, falls eine Zahl $\alpha > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ auch $x + \alpha \in D$ erfüllt ist, sowie

$$f(x + \alpha) = f(x)$$

gilt. Die Zahl α heißt Periode der Funktion f.

Die kleinste Periode einer Funktion f, also $\alpha_{min} = \min\{\alpha, \alpha$ Periode von $f\}$ nennt man primitive Periode der Funktion.

Buch Kap. 2.3 – Exponentialfunktion

1) Exponentialfunktion

$y = a^x,\ a \neq 1,\ a > 0,\ D = \mathbb{R}$.
Ist $a = e$ (Euler Zahl $e = 2{,}71828\ldots$), sprechen wir von der e-Funktion $y = e^x$.

Rechenregeln:

$$
\begin{aligned}
&1.)\ a^x a^y = a^{x+y},\\
&2.)\ (a^x)^y = a^{xy},\\
&3.)\ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}.
\end{aligned}
$$

Buch Kap. 2.3 – Logarithmus

2) Logarithmusfunktion

$y = log_a x,\ a \neq 1,\ a > 0,\ D = \mathbb{R}_{>0}$ **definiert als die Zahl** y **mit der Eigenschaft** $a^y = x$.
Ist $a = e$**, definieren wir mit**

$$y = \ln x := \log_e x$$

den natürlichen Logarithmus.

Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Rechenregeln ($b, c \in \mathbb{R}_{>0}$**)**

$$\begin{aligned} &1.)\ \log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c,\\ &2.)\ \log_a(\tfrac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c,\\ &3.)\ \log_a\ b^c = c \log_a b. \end{aligned}$$

Buch Kap. 2.3 – Potenzfunktion

3) Potenzfunktion $y = x^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$: natürlicher (größtmöglicher) Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$; $\nu \in \mathbb{Z}$, $\nu < 0$: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\nu \in \mathbb{R}$: $y = x^\nu := e^{\ln x^\nu} = e^{\nu \ln x}$, $D = \mathbb{R}_{>0}$.

Die Umkehrfunktionen zu $y = x^\nu$, $\nu \neq 0$, sind mit $y = x^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{x}$ wiederum Potenzfunktionen.

Buch Kap. 2.3 – Trigonometrische Funktionen

4) Trigonometrische Funktionen

$y = \sin x$, $y = \cos x$, $D = \mathbb{R}$, primitive Periode 2π;

$y = \tan x$, $D = \mathbb{R} \setminus \{x = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$,
$y = \cot x$, $D = \mathbb{R} \setminus \{x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, primitive Periode π.

Einige Zshge:

$$\begin{aligned}
&\tan x = \frac{\sin x}{\cos x},\\
&\sin^2 x + \cos^2 x = 1,\\
&\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,\\
&\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.
\end{aligned}$$

5) Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $D = [-1,1]$,
$y = \arctan\ x$, $y =$ arccot x, $D = \mathbb{R}$.

Buch Kap. 2.3 – Elementare Funktionen

Funktionen, die sich in einer geschlossenen analytischen Formel als Verknüpfung der Grundfunktionen vom Typ 1) bis 5) darstellen lassen, heißen elementare Funktionen.

Beispiele:

1) Polynome (ganz rationale Funktionen)

$$y = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad a_n \neq 0,\ a_k, x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

n heißt Grad des Polynoms, a_k $(k = 0, \dots, n)$ heißen Koeffizienten des Polynoms.

Buch Kap. 2.3 – Elementare Funktionen

2) Gebrochen rationale Funktionen (Polynombrüche)

$$y = \frac{p_n(x)}{q_m(x)},$$

mit den Polynomen $n-$ten bzw. $m-$ten Grades p_n und q_m.
Ist $n < m$, heißt y *echt gebrochen* **rationale Funktion oder echter Polynombruch.**
Für $n \geq m$, heißt y *unecht gebrochen* **rationale Funktion.**
Polynomdivision liefert dann

$$y = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = s_{n-m}(x) + r(x),$$

wobei s_{n-m} Polynom vom Grad $n-m$ und r echt gebrochen rational.

3) Hyperbelfunktionen

$$\begin{aligned}
\sinh x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, && D = \mathbb{R},\ W = \mathbb{R},\ \text{ungerade},\\
\cosh x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, && D = \mathbb{R},\ W = [1, \infty[,\ \text{gerade},\\
\tanh x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, && D = \mathbb{R},\ W =]-1,1[,\ \text{ungerade},\\
\coth x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, && D = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ W = \mathbb{R} \setminus [-1,1],\ \text{ungerad}
\end{aligned}$$

(sprich: Sinus hyperbolicus, Cosinus hyperbolicus,...).

Buch Kap. 2.3 – Area Funktionen

Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen heißen Areafunktionen.

$$y = \operatorname{arsinh} x$$

bezeichnet etwa die Umkehrfunktion von sinh x.

Alle Areafunktionen lassen sich explizit durch Logarithmusfunktionen ausdrücken. Es gilt z.B.

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Buch Kap. 2.3 – Elementare Funktionen

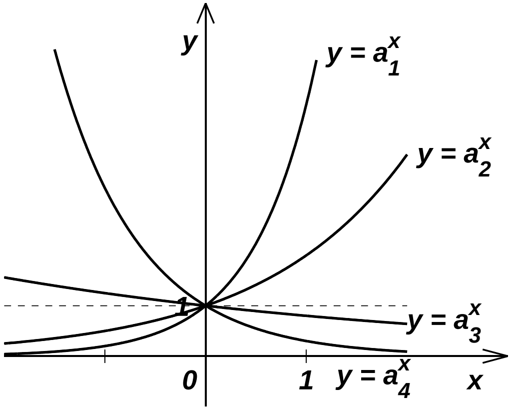

Abbildung 2.11: Exponentialfunktion $y = a^x$ zu Basen a_i $(0 < a_4 < a_3 < 1 < a_2 < a_1)$

Buch Kap. 2.3 – Elementare Funktionen

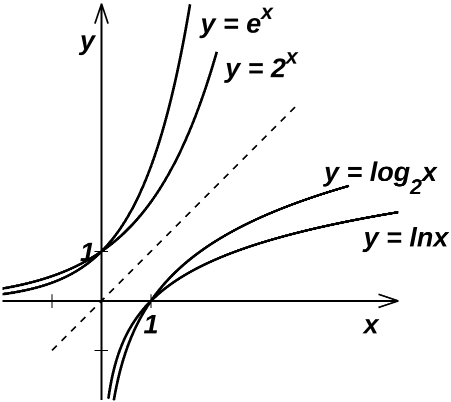

Abbildung 2.12: Exponentialfunktion und die Logarithmusfunktion als deren Umkehrfunktion

Buch Kap. 2.3 – Elementare Funktionen

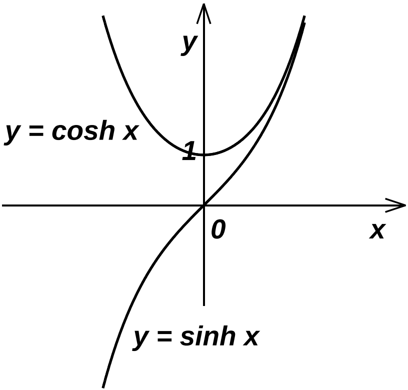

Abbildung 2.13: Hyperbelfunktionen $y = \cosh x$, $y = \sinh x$.

Buch Kap. 2.4 – Grenzwert von Funktionen

Definition 2.10′: (Grenzwerte einer Funktion über Folgen)
$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ reellwertige Funktion.
$f(x)$ strebt für $x \longrightarrow a$ (von links) {von rechts} gegen g, falls für jede Folge $(x_n) \subseteq D$, $x_n \neq a$, mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ (und $x_n < a$, $n \in \mathbb{N}$) {und $x_n > a$, $n \in \mathbb{N}$} schon $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$ gilt.
g heißt (linksseitiger){rechtsseitiger} Grenzwert von f bei a.
Notation:

- $g = \lim_{x\to a} f(x)$ (g Grenzwert),
- $g = \lim_{x\to a-0} f(x)$ (g linksseitiger Grenzwert),
- $g = \lim_{x\to a+0} f(x)$ {g rechtsseitiger Grenzwert}

Beachte: a muss kein Element von D sein, und g muss nicht Element des Wertebereichs der Funktion f sein.