20 11 07

Motivation Funktionsbegriff

Bakterienpopulation zur Zeit t

$$f(t) = \# \text{ Bakterien zur Zeit } t$$

Phänomen: Zunahme der Bakterien im Zeitraum $[t, t+\Delta t]$ ist proportional zu deren Anzahl zum Zeitpkt t.

Mathematisch:

$$\underbrace{\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}}_{f'(t)} \sim f(t)$$

$$\Delta t \to 0$$

$$f'(t) = \alpha f(t)$$

α Proportionalitätskonstante.

20 11 07 (2)

$$f'(t) = \alpha f(t)$$

Zur Zeit t_0 (Anfangszeit Beobachtung) gelte $f(t_0) = \beta$ (= # Bakterien zum Zeitpunkt t_0)

<u>Lösung</u>: $f(t) = \beta e^{\alpha(t-t_0)}$

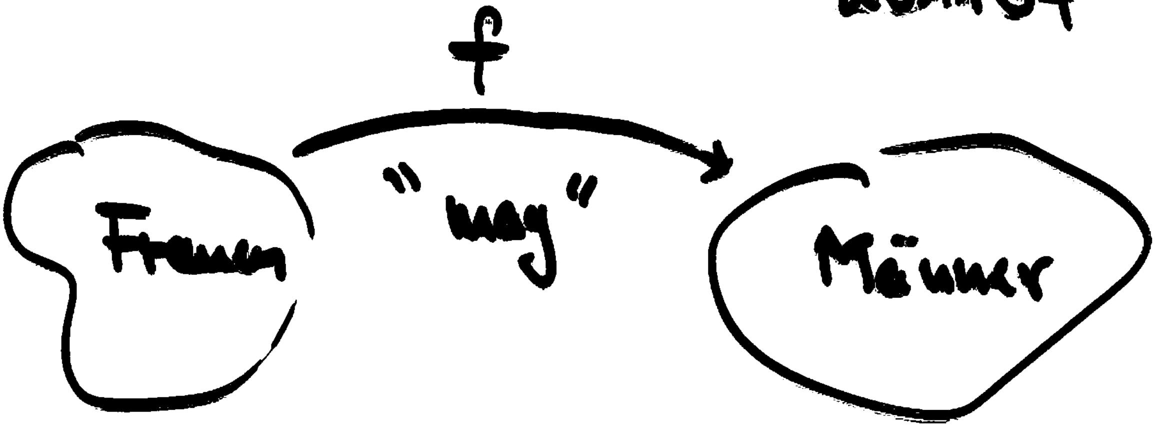
Sei $g(t)$ Arzneimittelmenge

$$f'(t) = \alpha f(t) - \underbrace{g(t)}_{\text{Wachstumsbremse}}$$

Damit ($t_0 = 0$)

$$f(t) = e^{\alpha t}\left\{\beta - \int_0^t g(x) e^{-\alpha x}\,dx\right\}$$

Damit Dosierung von g planbar



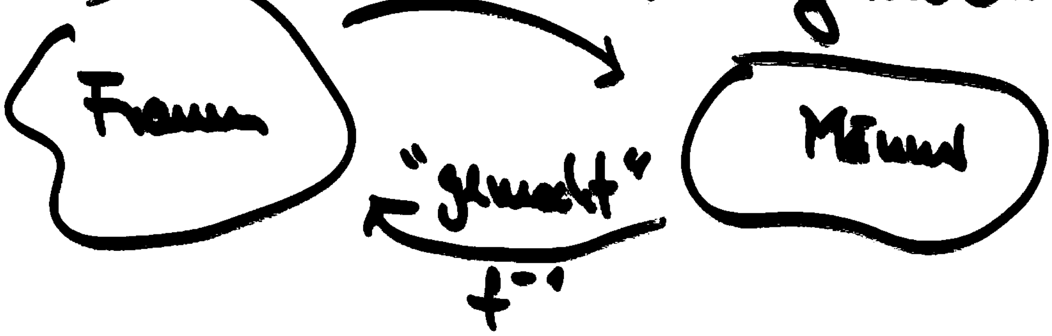
f injektiv : 2 Frauen mögen nicht denselben Mann

$\#$ Männer $\geq$ $\#$ Frauen

f surjektiv : kein Mann wird nicht gemocht

f bijektiv : zu jeder Frau gibt es genau einen Mann und jeder Mann wird von einer Frau gemocht

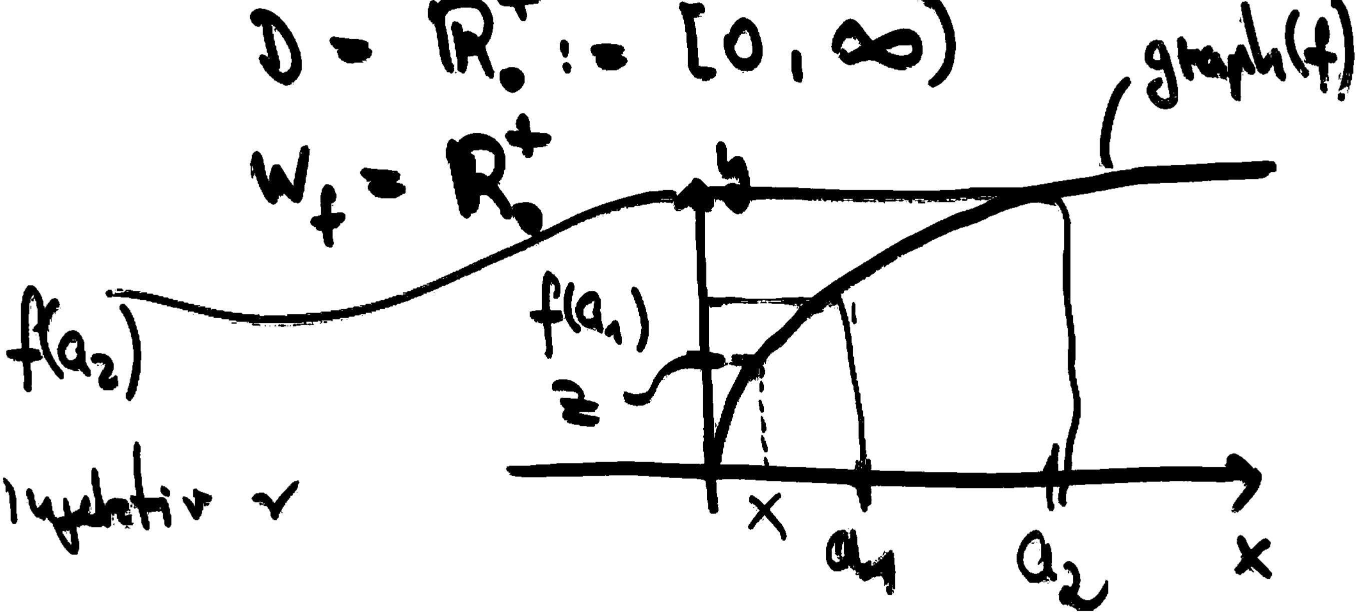
= injektiv + surjektiv



Bsp 1.) $f(x) = \sqrt{x}$

$D = \mathbb{R}_0^+ := [0, \infty)$

$W_f = \mathbb{R}_0^+$



injektiv ✓

surjektiv : $\forall_{z \in W_f} \exists_{x \in D} : f(x) = z$ ✓

surjektiv + injektiv = bijektiv

ii) $f(x) = e^x$, $D = \mathbb{R}$, $W_f = (0, \infty)$

bijektiv

ii)a) $D = \mathbb{R}$, $W_f = [0, \infty)$

nicht surjektiv, aber injektiv

iii) $f(x) = \cos x$ $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = [-1, 1]$

nicht injektiv, surjektiv

$\operatorname{graph}(f) = \{(x, y) \in D \times W_f ,\ y = f(x)\}$

<u>Bsp.</u> Umkehrfunktion

i.) $y = f(x) = \sqrt{x}$ $\quad D_f = \mathbb{R}_0^+ = W_f$

bijektiv $\quad y = \sqrt{x}$

$f^{-1}(y) = y^2$ $\quad y^2 = x$

Rollentausch

$f^{-1}(x) = x^2$ $\quad x^2 = y$

$W_{f^{-1}} = D_f \,,\ D_{f^{-1}} = W_f$

ii) $y = f(x) = \tan x$ $\quad D_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$W_f = \mathbb{R}$

$f^{-1}(x) = \arctan x$

$W_{f^{-1}} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\ D_{f^{-1}} = \mathbb{R}.$

Komposition von Funktionen

i.) $f(x) = e^x \,,\ g(x) = x^2$

$h(x) = g(f(x)) = (e^x)^2 = e^{2x}$

$\neq f(g(x)) = e^{x^2}$ nicht kommutativ

ii) $f(x) = x^2 \quad g(x) = \sqrt{x}$

$h(x) = g(f(x)) = |x|$

Bsp beschränkte Funktion

i.) $f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leq n^2 \\ n^2, & |x| > n^2 \end{cases}$

$n \in \mathbb{N}$ fix $\quad \underset{u}{0} \leq f(x) \leq \underset{o}{n^{\cancel{2}\,4}} \; \forall_{x \in \mathbb{R}}$