30.10.07

(1)

Sei

$$A_n = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$$

Frage: Wieviele Teilmengen besitzt A_n?

Vermutung

$$\#\text{ Teilmengen von } A_n =: Z_n = 2^n$$

$n=0$ $\quad Z_0 = 2^0 = 1$ $\quad \underbrace{\emptyset}_{\text{leere Menge}}$

$n=1$ $\quad Z_1 = 2^1 = 2$

$\emptyset, \{t_1\}$

$n=2$ $\quad Z_2 = 2^2 = 4$

$\emptyset, \{t_1\}, \{t_2\}, \{t_1, t_2\}$

$n=3$ $\quad Z_3 = 2^3 = 8$

K1

$\underline{\emptyset}, \underline{\{t_1\}}, \underline{\{t_2\}}, \{t_3\}, \underline{\{t_1, t_2\}},$
$\{t_1, t_3\}, \{t_2, t_3\}, \{t_1, t_2, t_3\}$

301007 ②

Beweis / Nachweis mittels vollständiger Induktion

Induktionsanfang : $n=1$ $z_1 = 2 = 2^1$ ✓

Induktionsannahme : $z_n = 2^n$

Zeige : $A_{n+1} = \{t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}\}$ enthält $z_{n+1} = 2^{n+1}$ ~~[illegible]~~ Teilmengen.

Def : $P(A) \equiv$ Menge aller Teilmengen von A

Potenzmenge

Schreibe $P(A_{n+1}) = K_1 \cup K_2$

mit

$T \in K_1$ gdw $t_{n+1} \notin T$

$T \in K_2$ gdw $t_{n+1} \in T$

Induktionsannahme: K_1 enthält 2^n Teilmengen, ebenso K_2

Ferner $K_1 \cap K_2 = \emptyset$

$$P(A_{n+1}) = K_1 \cup K_2$$

$$\Rightarrow \quad Z_{n+1} = \# K_1 + \# K_2$$

$$2^n + 2^n$$

$$= 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

$\boxtimes$

Bsp: Es gibt $P_n = n!$ Permutationen (Umordnungen) der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$

Hier für $k \in \mathbb{N}$:

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$$

Bew.: Vollständige Induktion

Ind. Anfang: $n = 1$; $P_1 = 1! = 1$

Ind. Annahme: $p_n = n!$ 301007

④

Zeige (Induktionsschritt von n nach $n+1$):

$p_{n+1} = (n+1)!$

Betrachte zu $i_1, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\left.\begin{array}{l} \{i_1, i_2, \dots, i_n, n+1\} \\ \{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, n+1, i_n\} \\ \quad\vdots \\ \{i_1, n+1, i_2, \dots, i_n\} \\ \{n+1, i_1, i_2, \dots, i_n\} \end{array}\right\} \quad n+1 \text{ Mengen}$$

Induktionsannahme liefert $n!$ mögliche Umordnungen von $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$

$$\rightarrow p_{n+1} = \underbrace{n! + n! + \dots + n!}_{n+1 \text{ mal}}$$

$$= (n+1)\, n! = (n+1)!$$

Hauptsatz der Zahlentheorie 301007

(5)

$n \in \mathbb{N}$, $n>1$. Dann

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k}$$

mit Primzahlen p_i (d.h. $p_i \in \mathbb{P}$)

und $r_i \in \mathbb{N}$ (für $1 \leq i \leq k$)

<u>Bsp</u>: $63 = 9 \cdot 7 = 3^2 \cdot 7$

$p_1 = 3$, $r_1 = 2$, $p_2 = 7$, $r_2 = 1$

$800 = 2^5 \cdot 5^2$

$p_1 = 2$, $r_1 = 5$, $p_2 = 5$, $r_2 = 2$

$\operatorname{ggT}(63, 800) = 1$

<u>Bew. Hauptsatz mit vollst. Induktion</u>

Ind Anfang: $\cancel{n=1}$

$n = 2 = 2^1$

31.10.07

6

Ind Annahme:

n besitze Primfaktorzerlegung

Ind Schritt $n \to n+1$:

i) $n+1$ Primzahl $\Rightarrow n+1 = (n+1)^1$,
d.h. $p_1 = n+1$, $r_1 = 1$

ii) $n+1 = k \cdot m$, $k, m < n$,
$k, m \geq 2$

k, m besitzen Primfaktorzerlegung und $k \cdot m$ ist Primfaktorzerlegung, also besitzt $n+1$ Primfaktorzerlegung;

$$k = p_{i_1}^{r_{i_1}} p_{i_2}^{r_{i_2}} \cdot \ldots \cdot p_{i_s}^{r_{i_s}}$$
$$m = p_{j_1}^{r_{j_1}} p_{j_2}^{r_{j_2}} \cdot \ldots \cdot p_{j_t}^{r_{j_t}} \quad \to$$

$$k \cdot m = p_{i_1}^{r_{i_1}} p_{i_2}^{r_{i_2}} \cdot \ldots \cdot p_{i_s}^{r_{i_s}} \cdot p_{j_1}^{r_{j_1}} p_{j_2}^{r_{j_2}} \cdot \ldots \cdot p_{j_t}^{r_{j_t}}$$
$$= p_{l_1}^{r_{l_1}} p_{l_2}^{r_{l_2}} \cdot \ldots \cdot p_{l_n}^{r_{l_n}}, \quad l_i, r_{l_i} \text{ geeignet}$$