Analysis I

Michael Hinze
(zusammen mit Frau Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

30. Oktober 2007

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben $\longrightarrow$ http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/0708/index.html**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/0708/index.html

Buch Kap. 1.4 – Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Peano Axiome zur Charakterisierung der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

1) **1 ist eine natürliche Zahl.**
2) **Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger n' (Schreibweise 2=1', 3=2' usw.).**
3) **1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.**
4) **die Nachfolger zweier verschiedener natürlicher Zahlen sind voneinander verschieden (daraus folgt insbesondere, dass jede natürliche Zahl außer 1 genau einen Vorgänger hat).**
5) **Induktionsprinzip: Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ mit**
   (i) $1 \in A$,
   (ii) $n \in A \Longrightarrow n' \in A$.
   Dann ist $A = \mathbb{N}$.

Buch Kap. 1.4 – Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Satz 1.1: (Prinzip der vollständigen Induktion)

Seien $n_0 \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ eine Aussageform für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$. Wenn die beiden Aussagen

1) **$A(n_0)$ ist wahr,**
2) **für alle $k \in \mathbb{N},\ k \geq n_0 :\quad A(k)$ ist wahr $\Longrightarrow A(k+1)$ ist wahr**

gelten, dann ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ wahr.

Buch Kap. 1.4 – Fundamentalsatz der Arithmetik

Jede natürliche Zahl $n > 1$ lässt sich auf eine und nur eine Weise als Produkt endlich vieler Primzahlen darstellen, wenn man die Primzahlen der Größe nach ordnet.

Danach lässt sich jede natürliche Zahl $n > 1$ auf genau eine Weise durch ein Produkt aus Primzahlpotenzen darstellen:

$$n = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots p_k^{\nu_k}$$

mit $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{P}$, $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ und $p_1 < p_2 < \dots < p_k$.

Buch Kap. 1.5 – Ganze Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{0,\ +1,\ -1,\ +2,\ -2,\ +3,\ -3,\ \ldots\}$$

$$n + x = m$$

für beliebige $n, m \in \mathbb{Z}$ nach x auflösbar.

<u>Merke:</u> $\mathbb{Z}$ abgeschlossen gegenüber Addition, Subtraktion und Multiplikation.

Aber: Nicht gegenüber Division, denn

Sucht man eine Lösung x der Gleichung $nx = m$ für $n, m \in \mathbb{Z},\ n \neq 0$, so gibt es eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$ nur dann, wenn n ein Teiler von m ist.

Erweiterung von $\mathbb{Z}$ notwendig.

Buch Kap. 1.5 – Rationale Zahlen

$$\mathbb{Q} = \{q \mid q = \frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ a, b \ \text{ teilerfremd}\}$$

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \text{ (setze } b = 1)$$

"a, b teilerfremd" $\Rightarrow$ Brüche, die nur durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgehen sind keine eigenständige Elemente in $\mathbb{Q}$.

Grundlage dafür: Primfaktorenzerlegung von Zähler und Nenner. Es wird solange "gekürzt", bis in Zähler und Nenner nur noch unterschiedliche Primzahlen vorhanden sind oder, was dasselbe ist, $ggT(a, b) = 1$.

In $\mathbb{Q}$ hat die Gleichung $nx = m$, $(n, m \in \mathbb{Z},\ n \neq 0)$ eine Lösung $x = \frac{m}{n}$.

Buch Kap. 1.5 – Periodische Dezimalbrüche

$a \in \mathbb{Q} \rightarrow a$ **daratellbar als** *unendlicher periodischer Dezimalbruch***:**

$$a = \sum_{n=0}^{m} z_{m-n} 10^{m-n} + \sum_{k=1}^{\infty} z_{-k} 10^{-k} \ , z_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

darstellen.
Kurzform: $a = z_m z_{m-1} \dots z_0, z_{-1} z_{-2} \dots$
Bsp: $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857142857 =$

$$10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-6} + ...,$$

Periode hier 142857.
Bsp: $\frac{90}{8} = 11\ 25000 \dots$

$$1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}.$$

Periode hier 0.

Buch Kap. 1.5 – Reelle Zahlen

Beachte: $x \in \mathbb{Q}$ **mit** $x^2 = 2$ **existiert nicht!**

Erweiterung von $\mathbb{Q}$ **notwendig** $\longrightarrow$ **Reelle Zahlen**

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \ \text{ ist unendlicher Dezimalbruch}\}.$$

Problematisch: Aufschreiben solcher nichtperiodischer Dezimalbrüche. Man kann nur Näherungen angeben, z.B.

$$1{,}41\ ; \quad 1{,}414\ ; \quad 1{,}4142\ ; \quad 1{,}41421\ \ldots$$

für $x = \sqrt{2}$**.**
Beim Rechnen mit diesen nichtperiodischen Dezimalbrüchen muss man sich im Allg. auch auf Näherungswerte in Form endlicher Dezimalbrüche stützen.