6.2 Die Regeln von de l'Hospital

Ausgangsfrage: Wie berechnet man den Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

falls

- beide Funktionen gegen Null konvergieren, d.h.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

- beide Funktionen gegen Unendlich konvergieren, d.h.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$$

Beispiel: Sei $f(x) = x^2$ und $g(x) = x$. Dann gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} x = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} x = \infty.$$

Die erste Regel von de l'Hospital.

Satz (Regel von de l'Hospital für $\frac{0}{0}$)**:**
Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar, sei* $x_0 \in (a, b)$ *mit* $f(x_0) = g(x_0) = 0$ *und es gelte* $g(x) \neq 0$ *für* $x \neq x_0$. *Dann gilt*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

sofern der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Beweis: Mit dem zweiten Mittelwertsatz gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

für einen Punkt $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0, 1)$ (d.h. θ liegt zwischen x und x_0). Konvergiert nun x gegen x_0, so konvergiert auch ξ gegen x_0, d.h.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

■

Weitere Regeln von de l'Hospital.

- Für einseitige Grenzwerte gilt

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{und} \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Falls die rechte Seite gegen $+\infty$ oder $-\infty$ divergiert, d.h. falls gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty,$$

so gilt mit der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty.$$

- Wir betrachten nun uneigentliche Grenzwerte der Form

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

De l'Hospital für uneigentliche Grenzwerte.

Satz: *Seien* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar mit* $g(x) \neq 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$. *Dann gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

sofern der jeweilige Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Beweis: Mit dem Satz von de l'Hospital und der Substitution $y = 1/x$ folgt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{y\to 0+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{y\to 0+} \frac{f'(1/y)(-1/y^2)}{g'(1/y)(-1/y^2)} \\ &= \lim_{y\to 0+} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.\end{aligned}$$

Den zweiten Teil der Aussage beweist man analog. ∎

Die zweite Regel von de l'Hospital.

Satz (Regel von de l'Hospital für $\frac{\infty}{\infty}$)**:**
Seien $f, g : (a, b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar, sei* $x_0 \in (a, b)$, *und es gelte*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$$

sowie $g'(x) \neq 0$ *für* $x \neq x_0$. *Dann gilt*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

sofern der Grenzwert auf der rechten Seite existiert. □

Zwei Beispiele.

- **Beispiel 1:** Betrachte die sinc-Funktion $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ bei Null:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

- **Beispiel 2:**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x\cdot\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{-2}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2}{x^2-1}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = 2 \qquad \square
\end{aligned}$$

Ein weiteres Beispiel.

- **Beispiel 3:**

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\log(1+x)}{x\cdot\log(1+x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\log(1+x)+\frac{x}{1+x}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)\log(1+x)+x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\log(1+x)+1+1}=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

□

6.3 Kurvendiskussion

Ziel: Feststellung des qualitativen und quantitativen (Werte-)Verhaltens einer gegebenen Funktion $y = f(x)$ mit Skizze des Graphen von f.

Dabei sollen (mindestens) folgende Punkte untersucht werden.

(1) Definitionsbereich, Wertebereich

(2) Symmetrien

(3) Pole (Singularitäten)

(4) Asymptotisches Verhalten (Verhalten im Unendlichen)

(5) Nullstellenbestimmung

(6) Bestimmung der (lokalen) Extrema

(7) Werteverhalten

(8) Bestimmung der Wendepunkte

(9) Skizze des Graphen

Erklärungen zur Kurvendiskussion.

Im folgenden bezeichne $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, eine Funktion.

- f ist symmetrisch zur y-Achse (bzw. f ist eine gerade Funktion), falls

$$f(-x) = f(x), \qquad \text{für alle } x \in D.$$

- f ist symmetrisch zum Ursprung (f ist eine ungerade Funktion), falls

$$f(-x) = -f(x), \qquad \text{für alle } x \in D.$$

- f besitzt einen (algebraischen) Pol in $x_0 \in D$, falls

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x - x_0)^k}$$

  wobei $k \in \mathbb{N}$ (Ordnung des Pols) und $g : D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 mit $g(x_0) \neq 0$.
  Ist k ungerade, so ist der Pol ein Pol mit Vorzeichenwechsel.
  Ist k gerade, so ist der Pol ein Pol ohne Vorzeichenwechsel.

Weitere Erklärungen zur Kurvendiskussion.

- Eine Gerade $y = \alpha x + \beta$ heißt `Asymptote` von f für $x \to \pm\infty$, falls gilt

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - \alpha x - \beta) = 0$$

- Die Koeffizienten einer Asymptoten ergeben sich durch

$$\alpha = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \beta = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - \alpha x)$$

- **Werteverhalten:** Hierbei soll untersucht werden, in welchen Intervallen f
  - positiv (negativ)
  - (streng) monoton fallend bzw. (streng) monoton wachsend

  ist.

Beispiel zur Kurvendiskussion.

Betrachte die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2}.$$

(1) Definitionsbereich: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

In $x_0 = 0$ ist f nicht stetig ergänzbar, denn $\lim_{x \to 0}(2x^2 + 3x - 4) = -4 \neq 0$.

(2) Symmetrien: keine, f ist weder achsensymmetrisch noch punktsymmetrisch.

(3) Pole: $x_0 = 0$ ist Pol ohne Vorzeichenwechsel, denn $\lim_{x \to 0\pm} f(x) = -\infty$.

(4) Asymptotik: Es gilt

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2} = 2,$$

und somit ist $y \equiv 2$ eine horizontale Asymptote.

Beispiel zur Kurvendiskussion (Fortsetzung).

Betrachten

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2}.$$

(5) Nullstellen: Es gilt

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^2 + 3x - 4 = 0.$$

Somit sind $x_{1,2} = \frac{1}{4}(-3 \pm \sqrt{41})$ die beiden (einzigen) Nullstellen von f.

(6) Lokale Extrema: Es gilt

$$f'(x) = \frac{-3x + 8}{x^3} \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{6x - 24}{x^4}.$$

Somit liegt bei $x = \frac{8}{3}$ ein stationärer Punkt vor.
Weiterhin gilt $f''(\frac{8}{3}) = -\frac{27}{64} < 0$.
Daher hat f in $x = \frac{8}{3}$ ein strenges lokales Maximum mit $f(\frac{8}{3}) = \frac{41}{16} \approx 2.5625$.

Beispiel zur Kurvendiskussion (Fortsetzung).

Betrachten

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2}.$$

(7) Werteverhalten: Es gilt

$$f(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } -\infty < x < \frac{1}{4}(-3 - \sqrt{41}) & \text{(positiv)} \\ < 0 & \text{für } \frac{1}{4}(-3 - \sqrt{41}) < x < 0 & \text{(negativ)} \\ < 0 & \text{für } 0 < x < \frac{1}{4}(-3 + \sqrt{41}) & \text{(negativ)} \\ > 0 & \text{für } \frac{1}{4}(-3 + \sqrt{41}) < x < \infty & \text{(positiv)} \end{cases}$$

sowie

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } \frac{8}{3} < x < \infty & \text{(streng monoton fallend)} \\ > 0 & \text{für } 0 < x < \frac{8}{3} & \text{(streng monoton wachsend)} \\ < 0 & \text{für } -\infty < x < 0 & \text{(streng monoton fallend)} \end{cases}$$

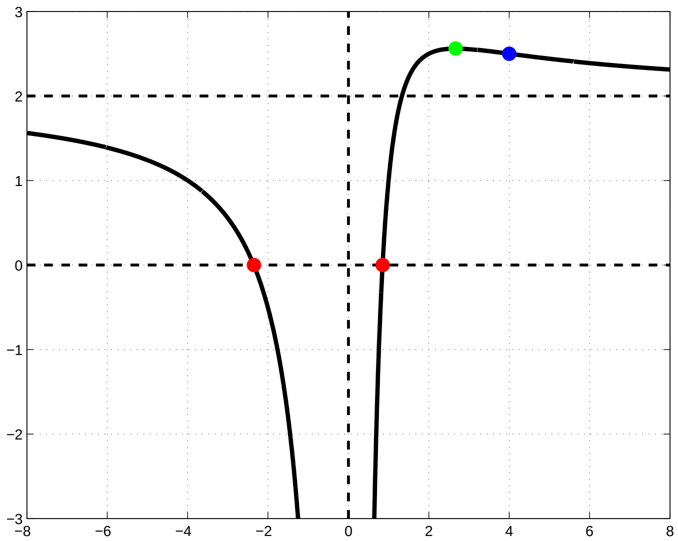
Beispiel zur Kurvendiskussion (Fortsetzung).

(8) Wendepunkte: Es gilt

$$f''(x) = \frac{6x - 24}{x^4} \quad \text{und} \quad f^{(3)}(x) \quad = \quad \frac{96 - 18x}{x^5}.$$

Somit gilt $f''(x) = 0$ für $x = 4$ mit $f(4) = \frac{5}{2}$. Weiterhin gilt $f^{(3)}(4) = \frac{3}{128} > 0$. Daher liegt bei $x = 4$ ein Wendepunkt mit Rechts-Linkskurve vor.

(9) Skizze:



Graph von $f(x) = \frac{2x^2+3x-4}{x^2}$.