6 Weiterer Ausbau der Differentialrechnung

6.1 Mittelwertsätze, Extremwerte, Satz von Taylor

Motivation: Wie wählt man Höhe und Durchmesser einer Konservendose, so dass bei festem Volumen V möglichst wenig Blech verbraucht wird?

Sei r der Radius der Grundfläche und h die Höhe der Konservendose. Dann gilt

$$f(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

für die Oberfläche der Konservendose.

Ziel: Minimiere f unter Variation von r und h unter der Nebenbedingung

$$V = \pi r^2 h \qquad \Longleftrightarrow \qquad h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

Minimiere somit

$$f(r) = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}$$

unter Variation von r. □

Klassifikation von Extrema.

Definition: *Sei* V *normierter Vektorraum und* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset V$, *eine Funktion.*

Dann hat die Funktion f *in* $x_0 \in D$

- *ein* globales Maximum, *falls* $f(x) \leq f(x_0)$ *für alle* $x \in D$.
- *ein* strenges globales Maximum, *falls* $f(x) < f(x_0)$ *für alle* $x \in D \setminus \{x_0\}$.
- *ein* lokales Maximum, *falls es ein* $\varepsilon > 0$ *gibt mit*

$$\|x - x_0\| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq f(x_0) \qquad \text{für alle } x \in D.$$

- *ein* strenges lokales Maximum, *falls es ein* $\varepsilon > 0$ *gibt mit*

$$\|x - x_0\| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad f(x) < f(x_0) \qquad \text{für alle } x \in D.$$

Die Begriffe (strenges) globales Minimum *und* (strenges) lokales Minimum *definiert man analog. Weiterhin fasst man die Begriffe "Minimum" und "Maximum" unter dem Oberbegriff* Extremum *zusammen.* $\square$

Notwendige Kriterien für lokale Extrema.

Satz: *Besitzt eine Funktion* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *in einem Punkt* $x_0 \in (a, b)$ *ein lokales Extremum, und ist* f *in* x_0 *differenzierbar, so gilt* $f'(x_0) = 0$.

Falls x_0 *Randpunkt von* $[a, b]$ *(d.h.* $x = a$ *oder* $x = b$*), so gilt*

- $f'(x_0) \le 0$ *(*$f'(x_0) \ge 0$*) für ein lokales Maximum (Minimum) in* $x_0 = a$,
- $f'(x_0) \ge 0$ *(*$f'(x_0) \le 0$*) für ein lokales Maximum (Minimum) in* $x_0 = b$.

Beweis: Sei $x_0 \in [a, b]$ ein lokales Maximum von f. Dann gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0 \quad \text{für } x_0 < x \le \min(x_0 + \varepsilon, b),$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0 \quad \text{für } \max(x_0 - \varepsilon, a) \le x < x_0,$$

und daher $f'(x_0^-) \ge 0$ und $f'(x_0^+) \le 0$. Für $x_0 \in (a, b)$ folgt somit $f'(x_0) = 0$. ■

Definition: *Ein Punkt* x_0 *mit* $f'(x_0) = 0$ *heißt* stationärer Punkt *von* f. □

Zurück zu dem Beispiel mit der Blechdose.

Ziel: Minimiere

$$f(r) = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}$$

unter Variation von $r \in (0, \infty)$. Es gilt $h = \frac{V}{\pi r^2}$ für die Höhe der Dose.

- Die Funktion f ist stetig in $(0, \infty)$ und es gilt $V > 0$.
- Es gilt $\lim_{r \to 0^+} f(r) = \lim_{r \to \infty} f(r) = \infty$.
- f besitzt somit in $(0, \infty)$ ein globales Minimum.
- Die notwendige Bedingung

$$f'(r) = 4\pi r - 2\frac{V}{r^2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4\pi r^3 = 2V$$

  für ein Minimum $r_0 \in (0, \infty)$ ist nur erfüllt für

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

- **Lösung:** f besitzt in r_0 ein strenges globales Minimum. Es gilt $h_0 = 2r_0$. $\square$

Ein weiteres Beispiel.

Betrachte die Funktion $f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$ auf dem Intervall $[-1, 1]$. Es gilt

$$f'(x) = \frac{2x - 3x^3}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{für } -1 < x < 1.$$

- **Stationäre Punkte**: $2x - 3x^3 = 0$ gilt nur für $x \in \{-\sqrt{2/3}, 0, \sqrt{2/3}\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & : \quad -1 < x < -\sqrt{2/3} \\ < 0 & : \quad -\sqrt{2/3} < x < 0 \\ > 0 & : \quad 0 < x < \sqrt{2/3} \\ < 0 & : \quad \sqrt{2/3} < x < 1 \end{cases}$$

- **Globale Minima** bei $x = \pm 1$ und $x = 0$ mit Funktionswert $f(x) = 0$.
- **Globale Maxima** bei $x = \pm\sqrt{2/3}$ mit Funktionswert $f(x) = 2/(3\sqrt{3})$. $\square$

Ein erster Mittelwertsatz.

Satz (Satz von Rolle)**:** *Ist* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig auf* $[a, b]$ *und differenzierbar auf* (a, b)*, so gilt die Implikation*

$$f(a) = f(b) \quad \Longrightarrow \quad \exists\, x_0 \in (a, b) \;:\; f'(x_0) = 0.$$

Beweis: Da f auf dem Kompaktum $[a, b]$ stetig ist, nimmt f auf $[a, b]$ Minimum und Maximum an.

Fall 1: Liegen diese beiden Extrema am Rand des Intervalls $[a, b]$, so ist f konstant, woraus folgt $f'(x) \equiv 0$.

Fall 2: Anderenfalls liegt ein Extremum x_0 in (a, b), woraus folgt $f'(x_0) = 0$.

■

Weitere Mittelwertsätze.

Satz:

- Erster Mittelwertsatz

  Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig auf* $[a,b]$ *und differenzierbar auf* (a,b)*, so gilt:*

$$\exists\, x_0 \in (a,b) \quad : \qquad f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

- Zweiter Mittelwertsatz

  Sind die Funktionen f, g *stetig auf* $[a,b]$ *und differenzierbar auf* (a,b) *und gilt* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in (a,b)$*, so gilt*

$$\exists\, x_0 \in (a,b) \quad : \qquad \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Beweis: 1. MWS: Die Funktion

$$h(x) = f(x) - \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a))$$

erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Rolle, denn $h(a) = f(a) = h(b)$. Somit gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$0 = h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{1}{b-a}(f(a) - f(b)).$$

2. MWS: Wegen $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, gilt $g(b) \neq g(a)$. Somit erfüllt die Funktion

$$h(x) = f(x) - g(x) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

die Voraussetzungen des Satzes von Rolle, denn es gilt

$$h(a) = f(a) - g(a) \cdot \tfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = f(b) - g(b) \cdot \tfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = h(b).$$

Somit gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$0 = h'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \qquad \blacksquare$$

Folgerungen aus den Mittelwertsätzen.

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $[a, b]$. Dann gilt:

- Falls $f'(x) \equiv 0$, so ist f konstant auf $[a, b]$.
- Falls $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, genau dann wenn f monoton wachsend.
- Falls $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist f streng monoton wachsend.
- Falls $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in [a, b]$, genau dann wenn f monoton fallend.
- Falls $f'(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist f streng monoton fallend.

$\square$

Beispiel. Betrachte $f(x) = x - \log(1 + x)$ für $x \in (-1, \infty)$. Wegen

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \begin{cases} < 0 & \text{für } -1 < x < 0, \\ > 0 & \text{für } 0 < x < \infty, \end{cases}$$

ist f streng monoton fallend in $(-1, 0]$, streng monoton wachsend in $[0, \infty)$. $\square$

Definition (Landau-Symbole): *Für eine Funktion* $\varphi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $0 \in D \cap D'$, *und* $k \in \mathbb{N}_0$ *sagt man:*

$$\varphi(h) = o(h^k) \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h)}{h^k} = 0$$

$$\varphi(h) = \mathcal{O}(h^k) \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \exists\, C, \varepsilon > 0 \;:\; \forall\, 0 < |h| < \varepsilon \;:\; \left| \frac{\varphi(h)}{h^k} \right| \leq C$$

$\square$

Bedeutung:

$\varphi(h) = o(h^k)$:

$\varphi(h)$ konvergiert für $h \to 0$ schneller gegen Null als h^k.

$\varphi(h) = \mathcal{O}(h^k)$:

$\varphi(h)$ konvergiert für $h \to 0$ mindestens so schnell gegen Null wie h^k.

Beispiel: Ist f differenzierbar in x_0, so gilt:

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0).$$

Taylor-Entwicklungen und Taylor-Polynome.

Ausgangsfrage: Wie kann man $f(x)$ in der Nähe von x_0 approximieren?

0. Antwort: $f(x) \approx f(x_0)$ für $x \approx x_0$.

1. Antwort: Ist f differenzierbar, so gilt

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\textbf{Polynom vom Grad 1}} + o(x - x_0)$$

2. Antwort: Ist f zweimal differenzierbar, so gilt

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2}}_{\textbf{Polynom vom Grad 2}} + o\left((x - x_0)^2\right),$$

denn es gilt

$$f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Hinweis: Integration über $[x_0, x]$ liefert die zweite Antwort. $\square$

Satz (Satz von Taylor): *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine* C^n*-Funktion und* $x_0 \in (a, b)$. *Dann gilt*

$$f(x) = T_n(x; x_0) + o\left((x - x_0)^n\right)$$

mit dem (eindeutig bestimmten) Taylor-Polynom

$$T_n(x; x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Den Punkt x_0 *nennt man den* Entwicklungspunkt.

Ist f *eine* C^{n+1}*-Funktion, so gilt die* Lagrange-Restgliedformel

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x; x_0) \\ R_n(x; x_0) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad \text{für ein } \xi \in (x_0, x). \end{aligned}$$

$\square$

Zur Form des Taylorschen Polynoms.

Ziel: Approximiere f durch ein Polynom der Form

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k \qquad \text{mit } a_j \in \mathbb{R}.$$

Forderungen: $f^{(j)}(x_0) = T^{(j)}(x_0)$ für $j = 0, 1, \ldots, n$.

Beachte: Für die j-te Ableitung von $T(x)$ gilt

$$T^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{n} a_k k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-j+1)(x-x_0)^{k-j}$$

und weiterhin $T^{(j)}(x_0) = a_j \cdot j! = f^{(j)}(x_0)$ mit der obigen Forderung.

Somit gilt

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \equiv T_n(x; x_0).$$

□

Restgliedformeln für das Taylorsche Polynom.

Ausgangspunkt. Mit dem Satz von Taylor gilt $f(x) = T_n(x; x_0) + R_n(x; x_0)$.

- Integraldarstellung:

$$R_n(x; x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

- Cauchy-Restgliedformel:

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-x_0)^{n+1} (1-\theta)^n$$

mit $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0,1)$

- Schlömilch-Restgliedformel:

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{p \cdot n!} (x-x_0)^{n+1} (1-\theta)^{n+1-p}$$

mit $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0,1)$, $p \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$. $\square$