Die alternierende harmonische Reihe.

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

konvergiert nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = \ln(2) = 0.69314\ldots$$

für den Grenzwert der alternierenden harmonischen Reihe. $\square$

Absolute Konvergenz von Reihen.

Definition: *Eine Reihe* $\sum a_k$ *heißt* `absolut konvergent`, *falls die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert. □

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

ist konvergent, aber **nicht** absolut konvergent, denn es gilt $a_k = (-1)^k \frac{1}{k+1}$ und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{1}{k+1} \right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

ist die harmonische Reihe, die **nicht** konvergiert. □

Kriterien für absolute Konvergenz von Reihen.

Satz: *Sei* $\sum_k a_k$ *eine Reihe. Dann gelten die folgenden Konvergenzkriterien.*

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent* $\iff$ $\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right)_{n \geq 0}$ *beschränkt;*

(b) **Majorantenkriterium:**

$$|a_k| \leq b_k \ \wedge \ \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent;}$$

(c) **Quotientenkriterium:** *Sei* $a_k \neq 0$ *(*$\forall\, k \geq k_0$*).*

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1 \quad (\forall\, k \geq k_0) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent;}$$

(d) **Wurzelkriterium:**

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \quad (\forall\, k \geq k_0) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent.}$$

Beweis: (a): Die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n}|a_k|\right)_{n\geq 0}$ ist monoton wachsend und daher genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

(b): Mit $|a_k| \leq b_k$ gilt $b_k \geq 0$ für alle k. Somit ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sogar absolut konvergent. Nach Teil (a) ist die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)_{n\geq 0}$ beschränkt. Mit

$$\sum_{k=0}^{n}|a_k| \leq \sum_{k=0}^{n} b_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$$

folgt, dass $\left(\sum_{k=0}^{n}|a_k|\right)$ beschränkt und somit nach (a) absolut konvergent ist.

(c): Aus $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q \; (\forall\, k \geq k_0)$ folgt $|a_k| \leq q^{k-k_0}|a_{k_0}|$ per Induktion. Somit:

$$\sum_{k=0}^{n}|a_k| \leq \sum_{k=0}^{k_0-1}|a_k| + |a_{k_0}|\sum_{j=0}^{n-k_0} q^j \leq \sum_{k=0}^{k_0-1}|a_k| + |a_{k_0}|\frac{1}{1-q} < \infty$$

für alle n. Nach Teil (a) ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

(d): Aus $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$ $(k \geq k_0)$ folgt direkt $|a_k| \leq q^k$ für alle $k \geq k_0$. Somit:

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + \frac{q^{k_0}}{1-q} < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{absolut konvergent.}$$

$\blacksquare$

Bemerkung:

- Das Quotienten- bzw. das Wurzelkriterium ist erfüllt, falls gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$

- Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist dagegen divergent, falls gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1.$$

$\square$

Beispiel. Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

Es gilt

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

und daher

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Die Reihe ist somit (absolut) konvergent. □

Beispiel. Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \qquad (r \in \mathbb{N}, r \geq 2)$$

Nach dem letzten Beispiel gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r} &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &< 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} < 2 \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die Reihe (absolut) konvergent. $\square$

Einige Grenzwerte (ohne Beweis):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

$\square$

Beispiel. Wir untersuchen die Konvergenz der Exponentialreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Anwendung des Quotientenkriteriums ergibt

$$\left| \frac{\dfrac{z^{k+1}}{(k+1)!}}{\dfrac{z^k}{k!}} \right| = \left| \frac{z^{k+1}\, k!}{z^k\, (k+1)!} \right| = \frac{|z|}{k+1} \quad \longrightarrow \quad 0 \quad (k \to \infty)$$

Damit konvergiert die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ (absolut).

Wir setzen

$$\exp(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

$\square$

Der Umordnungssatz für Reihen.

Sei $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ eine beliebige Bijektion (Permutation) auf $\mathbb{N}_0$.

Ziel: Vergleiche die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k} \qquad (\sigma_k = \sigma(k))$$

Satz: *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe, und sei $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ eine beliebige Permutation auf $\mathbb{N}_0$. Dann ist die umgeordnete Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$ ebenfalls absolut konvergent, und die Grenzwerte der beiden Reihen stimmen überein, d.h. es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}.$$

Beweis: Für $m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{m} |a_{\sigma_k}| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|,$$

wobei $N \in \mathbb{N}_0$ so groß gewählt sei, dass $\{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_m\} \subset \{0, 1, \ldots, N\}$.

Somit ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$ absolut konvergent und es gilt

$$S' := \sum_{k=0}^{\infty} |a_{\sigma_k}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| =: S.$$

Nun ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Umordnung der (absolut konvergenten) Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$, und somit gilt ebenso $S \leq S'$. Insgesamt bekommt man $S = S'$.

Wendet man dies auf die absolut konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(|a_k| + a_k)$ an, so bekommt man

$$S + \sum_{k=0}^{\infty} a_k = S' + \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$$

woraus die Behauptung $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$ folgt. ■

Multiplikation von Reihen.

Frage: Wie funktioniert das “Ausmultiplizieren” von Reihen?

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell\right) = ???$$

Produkt von endlichen Summen. Für *endliche* Summen gilt

$$(a_0 + \ldots + a_m)\cdot(b_0 + \ldots + b_n) = \sum_{k=0}^{m} a_k \left(\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell\right) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{\ell=0}^{n} a_k b_\ell .$$

Frage: Gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell\right) \stackrel{?}{=} \sum_{k,\ell=0}^{\infty} a_k b_\ell .$$

Beachte:

Jedes Indexpaar $(k,\ell) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ auf der rechten Seite tritt *genau* einmal auf.

Satz: *Die Reihen* $\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell$ *und* $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ *seien absolut konvergent. Weiterhin sei* $\sigma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, $k \mapsto (\sigma_1(k), \sigma_2(k))$ *für* $k \in \mathbb{N}_0$, *eine bijektive Abbildung. Dann ist die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)}$ *absolut konvergent und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)} = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m \right).$$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}_0$ und für hinreichend großes $N \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} |a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)}| \leq \sum_{\ell=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} |a_\ell| \, |b_m| \leq \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} |a_\ell| \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \right) < \infty.$$

Somit ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)}$ absolut konvergent, und ihr Grenzwert ist nach dem Umordnungssatz unabhängig von der Permutation $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$.

Zur Berechnung des Grenzwertes wählt man eine spezielle Reihenfolge

$\sigma(k)$	0	1	2	3	$\ldots$
0	0	3	8	15	$\ldots$
1	1	2	7	14	$\ldots$
2	4	5	6	13	$\ldots$
3	9	10	11	12	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Für $N = (n+1)^2 - 1$, mit $n \in \mathbb{N}_0$, bekommt man

$$\sum_{k=0}^{N} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)} = (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)(b_0 + b_1 + \ldots + b_n),$$

und somit

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell\right)\left(\sum_{m=0}^{n} b_m\right) = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right).$$

■

Das Cauchy-Produkt von Reihen.

Weiterer Spezialfall: Nummerierung entlang der Diagonalen

$\sigma(k)$	0	1	2	3	...
0	0	2	5	9	...
1	1	4	8	13	...
2	3	7	12	18	...
3	6	11	17	24	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Man erhält damit das Cauchy-Produkt der (absolut konvergenten) Reihen:

$$\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$$
$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \ldots$$

Anwendung des Cauchy-Produkts.

Für die Exponentialfunktion

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

gilt die Funktionalgleichung

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$$

Begründung: Die obige Reihe $\exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$, ist absolut konvergent. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\exp(z)\exp(w) &= \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{z^\ell}{\ell!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = \exp(z+w). \qquad \square
\end{aligned}$$