Beispiel.

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \sqrt{n^2+5n+1} - n$$

Es gilt

$$(n^2+5n+1) - n^2 = \left(\sqrt{n^2+5n+1} - n\right)\left(\sqrt{n^2+5n+1} + n\right),$$

woraus folgt

$$a_n = \frac{(n^2+5n+1) - n^2}{\sqrt{n^2+5n+1} + n} = \frac{5n+1}{\sqrt{n^2+5n+1} + n} = \frac{5 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1}$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{5+0}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{5}{2}.$$

$\square$

Der Satz von Bolzano-Weierstraß.

Satz (Bolzano-Weierstraß)**:**
Jede reelle beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle beschränkte Folge. Dann gibt es ein Intervall $[A, B]$ mit $\forall n : a_n \in [A, B]$. Betrachte nun die folgende Bisektionsmethode.

$A_1 := A;$
$B_1 := B;$
FOR $k = 1, 2, 3, \ldots$
    $C := (A_k + B_k)/2$
    IF $\{n \mid a_n \in [A_k, C]\}$ unendlich THEN
        $A_{k+1} := A_k; \quad B_{k+1} := C;$
    ELSE
        $A_{k+1} := C; \quad B_{k+1} := B_k;$

Beobachtung: Die Folgen (A_k) und (B_k) bilden eine Intervallschachtelung, d.h. $\forall\, k : A_k \leq B_k$, und es gibt einen gemeinsamen Grenzwert

$$\xi = \lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} B_k.$$

Definiere nun eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) wie folgt.

- Setze $n_1 := 1$;
- FOR $k = 2, 3, 4, \ldots$

  wähle $n_k > n_{k-1}$ mit $a_{n_k} \in [A_k, B_k]$.

Wegen

$$A_k \leq a_{n_k} \leq B_k, \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

gilt dann $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \xi$. ■

Definition: *Sei $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann wird der Grenzwert der Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ als* Häufungspunkte *der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet.* □

Das Cauchysche Konvergenzkriterium.

Satz: *Der Körper* $\mathbb{R}$ *ist* `vollständig`*, d.h. jede reelle Cauchyfolge konvergiert.*

Beweis: Zeige, dass jede Cauchyfolge beschränkt ist: Für n und $N = N(\epsilon)$ gilt

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < \varepsilon + |a_N|$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt (a_n) einen Häufungspunkt ξ.
Dann gilt für $m, n_k \geq N(\varepsilon/2)$:

$$\begin{aligned} |a_m - \xi| &= |a_m - a_{n_k} + a_{n_k} - \xi| \\ &\leq \underbrace{|a_m - a_{n_k}|}_{\text{Cauchyfolge}} + \underbrace{|a_{n_k} - \xi|}_{\text{Häufungspunkt}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

■

Notation:

$\liminf a_n$ = kleinster Häufungspunkt, $\limsup a_n$ = größter Häufungspunkt.

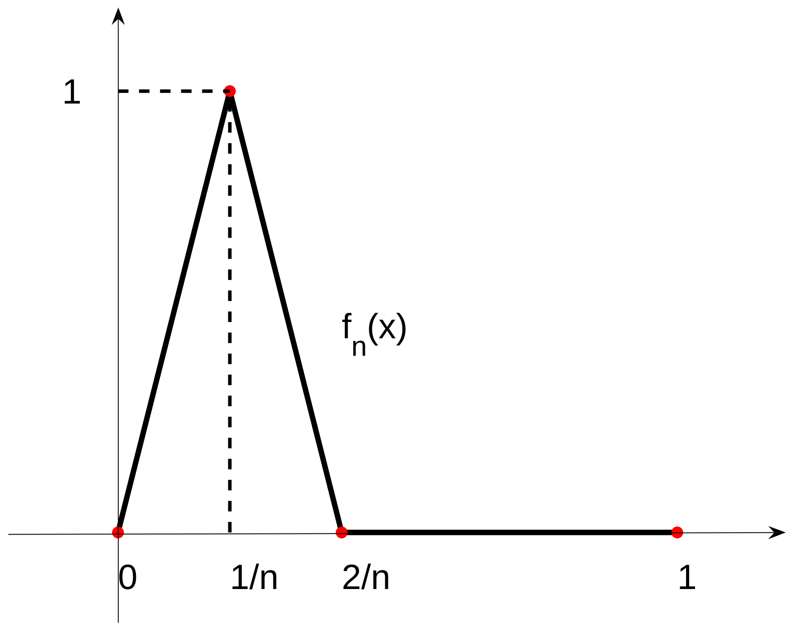
4.2 Konvergenz in normierten Vektorräumen

Beispiel. Betrachte den Vektorraum $C[0,1]$ aller stetigen Funktionen auf $[0,1]$.

Für jedes $n \geq 2$ liegt die Funktion

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{für } x \in [0, 1/n]; \\ 2 - nx & \text{für } x \in [1/n, 2/n]; \\ 0 & \text{für } x \in [2/n, 1]; \end{cases}$$

in $C[0,1]$, d.h. $f_n \in C[0,1]$ für alle $n \geq 2$.



Der Graph von $f_n(x)$.

Beobachtung: $\{f_n\}_{n \geq 2}$ bildet eine Folge von Funktionen in $C[0,1]$.

Wie sieht es mit der Konvergenz von f_n in $C[0,1]$ aus?

Fall 1. Verwende die Euklidische Norm $\|\cdot\|_2$. Dann gilt

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{1/n} nx\,dx + \int_{1/n}^{2/n} (2-nx)\,dx + \int_{2/n}^1 0\,dx = \ldots = \frac{2}{3n}$$

und somit $\|f_n\|_2 \leq 1/\sqrt{n}$ für $n \geq 2$. Die Folge $\{f_n\}_{n\geq 2}$ ist somit bezüglich der Euklidischen Norm eine Nullfolge in $C[0,1]$, d.h. $\{f_n\}_{n\geq 2}$ konvergiert gegen Null.

Fall 2. Verwende die Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$. Dann gilt

$$\|f_n\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = 1, \qquad \text{für alle } n \geq 2,$$

und es gibt *keine* stetige Funktion $f \in C[0,1]$ mit $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$.

Somit divergiert die Folge $\{f_n\}_{n\geq 2}$ in $C[0,1]$ bezüglich der Maximumnorm.

Fazit: Die Konvergenz einer Folge $(a_n)_n$ ist im Allgemeinen nicht nur abhängig vom zugrunde liegenden Vektorraum V, sondern auch (und vor allem!) von der verwendeten Norm $\|\cdot\|$. $\square$

Konvergenz in endlichdimensionalen Vektorräumen.

Bemerkung: In endlichdimensionalen Vektorräumen ist die Konvergenz (und der Grenzwert) einer Folge jedoch lediglich von dem jeweiligen Vektorraum abhängig, nicht von der zugrunde liegenden Norm.

Satz (Normäquivalenzsatz)**:** *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, und seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ zwei Normen auf V. Dann gibt es Konstanten $C, C' > 0$ mit*

$$C\|v\| \leq \|v\|' \leq C'\|v\|, \qquad \text{für alle } v \in V,$$

d.h. die beiden Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ sind äquivalent auf V. □

Fazit: Eine Folge (a_n), die in einem endlichdimensionalen Vektorraum V bezüglich einer Norm $\|\cdot\|$ in V gegen einen Grenzwert $a \in V$ konvergiert, konvergiert ebenso bezüglich jeder anderen Norm $\|\cdot\|'$ in V gegen a. □

- **Beispiele für endlichdimensionale Vektorräume:** $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$.
- **Beispiel für einen unendlichdimensionalen Vektorraum:** $C[a, b]$.

Konvergenz von Folgen im $\mathbb{R}^n$.

Folgerung: *Eine Folge* $(\mathbf{x}_m)$ *im* $\mathbb{R}^n$ *konvergiert genau dann, wenn alle* n *Koordinatenfolgen* $(x_j^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$, $j = 1,\ldots,n$, *in* $\mathbb{R}$ *konvergieren. Der Grenzwert der Folge* $(\mathbf{x}_m)$ *lässt sich komponentenweise berechnen.*

Beweis: $\mathbf{x}_m \to \mathbf{x}$ ist äquivalent zu

$$\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}\|_\infty \to 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall 1 \le j \le n : |x_j^{(m)} - x_j| \to 0, \quad m \to \infty,$$

und somit $x_j^{(m)} \to x_j$, $m \to \infty$, für alle $j = 1,\ldots,n$. $\blacksquare$

Beispiel: Für die Folge $(\mathbf{x}_m)$, gegeben durch

$$\mathbf{x}_m = \left(\frac{1}{m}, 1 + \exp\left(\frac{1}{m}\right), \frac{m^2+2m+3}{2m^2-1}\right)^T \in \mathbb{R}^3 \qquad \text{für } m \in \mathbb{N}.$$

gilt

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{x}_m = (0,2,1/2)^T \in \mathbb{R}^3.$$

$\square$

Konvergenz in endlichdimensionalen Vektorräumen.

Folgerung: In endlichdimensionalen Vektorräumen gilt

- das Cauchysche Konvergenzkriterium:

$$\exists\, \mathbf{a} \;:\; \mathbf{a}_m \to \mathbf{a} \; (m \to \infty)$$

$$\iff \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \equiv N(\varepsilon) \;:\; m, n \geq N \;:\; \|\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_n\| < \varepsilon$$

- der Satz von Bolzano-Weierstraß:
  Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beispiel: Für $a_n := z^n$, $z \in \mathbb{C}$ gegeben, gilt

$$|z| > 1 \quad \Longrightarrow \quad |a_n| = |z|^n \text{ unbeschränkt } \Longrightarrow (a_n) \text{ divergent;}$$

$$|z| < 1 \quad \Longrightarrow \quad |a_n| = |z|^n \to 0 \; (n \to \infty) \quad \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} z^n = 0.$$

$\square$

4.3 Konvergenzkriterien für Reihen

Definition: *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $a_n \in \mathbb{R}$ *(oder* $a_n \in \mathbb{C}$*), eine reelle (komplexe) Folge. Dann heißt die Folge* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, *definiert durch*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0,$$

eine Reihe *in* $\mathbb{R}$ *(bzw. in* $\mathbb{C}$*). Die Folgeglieder* s_n *der Reihe* (s_n) *werden als* Partialsummen *bezeichnet. Falls die Folge* (s_n) *der Partialsummen konvergiert, d.h. die Reihe konvergiert, mit einem Grenzwert* s, *d.h.* $s_n \to s$ $(n \to \infty)$, *so schreibt man*

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

für den Grenzwert *der Reihe* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. $\square$

Einige Konvergenzkriterien für Reihen.

Satz (Unmittelbare Konvergenzkriterien für Reihen)**:**

(a) Es gilt das Cauchysche Konvergenzkriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \textit{ konvergent} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N : m, n \geq N : \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

(b) Es gilt die notwendige Bedingung

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \textit{ konvergent} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k \to \infty} a_k = 0$$

Beweis:

- Teil (a) folgt unmittelbar aus dem Cauchy-Kriterium für Folgen.
- Teil (b) folgt aus Teil (a) für den Spezialfall $m = n$. ■

Satz (Weitere unmittelbare Konvergenzkriterien für Reihen)**:**

(c) Seien $\sum a_k$, $\sum b_k$ *konvergente Reihen. Dann konvergieren die Reihen* $\sum(a_k + b_k)$ *und* $\sum(\lambda a_k)$, *und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

(d) Es gilt das Leibnizsches Konvergenzkriterium*: Eine* alternierende Reihe *der Form* $\sum(-1)^k a_k$, $a_k \geq 0$, *deren (nicht-negativen) Folgeglieder* a_k *eine monoton fallende Nullfolge bilden, konvergiert, und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k$$

Beweis: Teil (c) folgt direkt aus der Linearität der Grenzwertbildung für Folgen.

Zu Teil (d): Für die Reihen

$$u_n := \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k a_k \quad \text{und} \quad v_n := \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k$$

gilt

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + (a_{2n} - a_{2n+1}) \geq u_n \\ v_{n+1} &= v_n - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \leq v_n \\ v_n &= u_n + a_{2n} \geq u_n \\ v_n - u_n &= a_{2n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

Somit bilden die Folgen (u_n), (v_n) eine Intervallschachtelung, konvergieren gegen einen gemeinsamen Grenzwert, und es gilt

$$u_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \leq v_n. \qquad \blacksquare$$

Die geometrische Reihe.

Beispiel: Für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt

$$x^m - y^m = (x - y) \sum_{j=1}^{m} x^{m-j} y^{j-1}.$$

Insbesondere mit $m = n + 1$, $x = 1$ und $y = q \in \mathbb{C}$ gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

für die Partialsummen der `geometrischen Reihe` $\sum q^k$. Daraus folgt, dass

- die geometrische Reihe für $|q| < 1$ konvergiert mit Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}$$

- die geometrische Reihe für $|q| > 1$ divergiert. ■

Die harmonische Reihe.

Beispiel: Die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

divergiert, denn es gilt

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{m} = \frac{1}{m} \sum_{k=n}^{m} 1 = \frac{m-n+1}{m} \longrightarrow 1 \quad (m \to \infty)$$

und somit ist das Cauchy-Kriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \iff \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N : m, n \geq N : \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

für $\varepsilon < 1$ verletzt. ■