Rechenoperationen mit Folgen.

Die Menge aller Folgen in V bildet einen Vektorraum, $V^{\mathbb{N}}$, für den die *Addition* und *skalare Multiplikation* wie folgt definiert sind.

$$\begin{aligned} (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} &:= (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ \lambda(a_n)_{n\in\mathbb{N}} &:= (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

Rekursion und Iteration.

Folgen lassen sich rekursiv beschreiben durch

$$a_{n+1} := \Phi(n, a_n), \qquad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

wobei

$$\Phi : \mathbb{N} \times V \to V$$

eine bestimmte Iterationsvorschrift bezeichnet.

Das Bisektionsverfahren (Intervallhalbierung).

- **Ziel:** Bestimme eine Nullstelle einer stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
- **Voraussetzung:** $f(a) \cdot f(b) < 0$.
- **Iteration:** Definiere zwei Folgen $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(v_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ rekursiv mit den Startwerten $(u_0, v_0) = (a, b)$ und der folgenden Iterationsvorschrift.

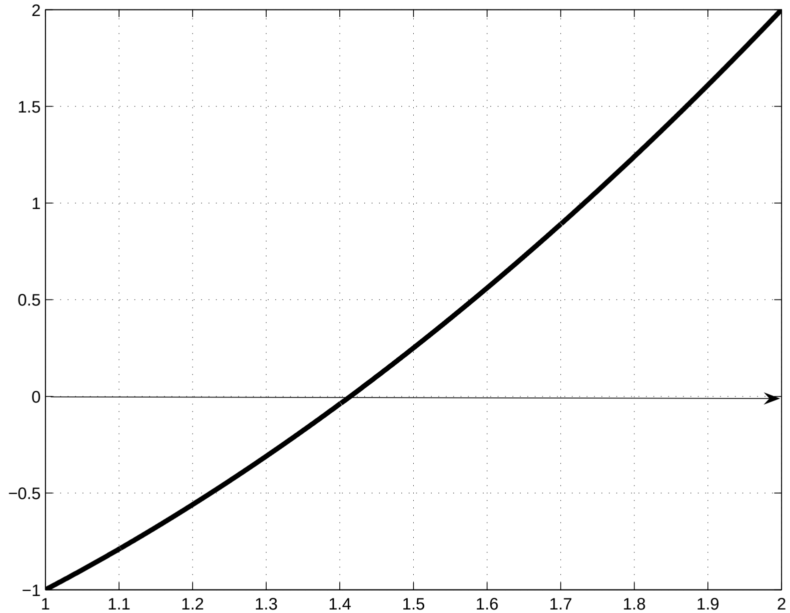
```
FOR n = 1, 2, ...
    x := (u_{n-1} + v_{n-1})/2
    IF f(x) = 0 THEN RETURN
    IF (f(x) · f(v_{n-1}) < 0) THEN
        u_n := x;    v_n := v_{n-1};
    ELSE
        u_n := u_{n-1};    v_n := x;
```

OUTPUT: x mit $f(x) = 0$, Nullstelle von f in $[a, b]$.

Beispiel. $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 2$, $a = 1$ und $b = 2$.

Beachte: $f(\sqrt{2}) = 0$, d.h. $\sqrt{2} = 1.4142\,13562\ldots$ ist Nullstelle von f.

n	u_n	v_n
0	1.0000 00000	2.0000 00000
1	1.0000 00000	1.5000 00000
2	1.2500 00000	1.5000 00000
3	1.3750 00000	1.5000 00000
10	1.4140 62500	1.4150 39063
20	1.4142 13181	1.4142 14134
30	1.4142 13562	1.4142 13562



Graph von $f(x) = x^2 - 2$**.**

Beobachtung: Das Bisektionsverfahren konvergiert relativ langsam!

Das Newton-Verfahren.

- **Ziel:** Bestimme eine Nullstelle einer *differenzierbaren* Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
- **Verwende** `Newton-Iteration`**:**

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad \text{für } f'(x_n) \neq 0,$$

mit Startwert x_0.

Bemerkung: Verfahren *konvergiert*, falls x_0 nahe bei einer Nullstelle von f liegt.

Beispiel: Für $f(x) = x^2 - 2$ und $x_0 = 1$ erhält man

n	0	1	2	3	4	$\cdots$
t_n	1.0000	1.5000	1.4166 66667	1.4142 15686	1.4142 13562	$\cdots$

Erinnerung: $f(\sqrt{2}) = 0$, d.h. $\sqrt{2} = 1.4142\,13562\ldots$ ist Nullstelle von f.

Konvergenz von Folgen.

Definition: *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in einem normierten Vektorraum* V. *Dann heißt*

- $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ *für* $n_j \in \mathbb{N}$ *mit* $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots$ *eine* Teilfolge *von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- *die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, *falls es ein* $C > 0$ *gibt mit*

$$\forall\, n \in N : \|a_n\| \leq C.$$

- *die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent *mit* Grenzwert *(*Limes*)* $a \in V$, *falls*

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq N : \|a_n - a\| < \varepsilon.$$

  Eine nicht-konvergente Folge heißt divergent.

- *die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge, *falls*

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall\, n, m \geq N : \|a_n - a_m\| < \varepsilon.$$

□

Satz: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem normierten Vektorraum. Dann gilt:

(a) (a_n) konvergent $\Longrightarrow$ (a_n) beschränkt;

(b) (a_n) konvergent $\Longrightarrow$ (a_n) Cauchy-Folge;

(c) Falls (a_n) konvergiert, so ist der Grenzwert von (a_n) eindeutig bestimmt.

Beweis von (a): Sei (a_n) konvergent mit Grenzwert a. Dann gilt für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ die *Abschätzung*

$$\|a_n\| = \|a_n - a + a\| \leq \|a_n - a\| + \|a\| < \varepsilon + \|a\| \qquad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon).$$

Damit ist die Folge (a_n) beschränkt mit der Konstanten

$$C = \max\{\|a_1\|, \|a_2\|, \ldots, \|a_{N-1}\|, \|a\| + \varepsilon\}.$$

Also

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \|a_n\| \leq C.$$

$\square$

Beweis von (b): Sei (a_n) konvergent mit Grenzwert a. Dann gilt für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ die *Abschätzung*

$$\begin{aligned} \|a_n - a_m\| &= \|a_n - a + a - a_m\| \\ &\leq \|a_n - a\| + \|a_m - a\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $n, m \geq N = N(\varepsilon/2)$ □

Beweis von (c): Sei (a_n) konvergent mit *verschiedenen* Grenzwerten a und $\overline{a}$. Dann gelten für $\varepsilon > 0$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|a_n - a\| &< \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon) \\ \|a_n - \overline{a}\| &< \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq \overline{N}(\varepsilon) \end{aligned}$$

Somit folgt für $n \geq \max\{N, \overline{N}\}$ die Ungleichung

$$\|a - \overline{a}\| = \|a - a_n + a_n - \overline{a}\| \leq \|a_n - a\| + \|a_n - \overline{a}\| < 2\varepsilon.$$

Da dies für *jedes* $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $a = \overline{a}$ im Widerspruch zur Annahme $a \neq \overline{a}$. ■

Notationen.

Für eine konvergente Folge (a_n) mit Grenzwert a schreiben wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{oder} \qquad a_n \to a \quad (n \to \infty).$$

Uneigentliche Konvergenz ...

... bzw. Divergenz gegen den uneigentlichen Grenzwert $\pm\infty$.

Für *reelle* Folgen definieren wir zusätzlich

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, C > 0 : \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq N : a_n > C$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, C > 0 : \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq N : a_n < -C$$

$\square$

Bemerkungen.

Die Umkehrung der Aussage im Satz, Teil (b),

$$(a_n) \text{ Cauchyfolge} \qquad \Longrightarrow \qquad (a_n) \text{ konvergent}$$

gilt nur in *gewissen* normierten Räumen, nämlich in

vollständigen Räumen bzw. **Banachräumen.**

Einen vollständigen *Euklidischen Vektorraum* nennt man

Hilbertraum.

Beispiele:

- für vollständige Räume: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$;
- für einen nicht vollständigen Raum: $(C[a,b], \|\cdot\|_2)$.

Satz: *Seien* (a_n) *und* (b_n) *zwei konvergente Folgen. Dann konvergieren die beiden Folgen* $(a_n + b_n)$ *und* (λa_n) *für* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(bzw.* $\lambda \in \mathbb{C}$*), wobei gilt*

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$,

(b) $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n$.

Beweis: Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim_{n\to\infty} b_n$, d.h. a sei Grenzwert von (a_n) und b sei Grenzwert von (b_n).

(a): Für $n \geq \max\{N_1(\varepsilon/2), N_2(\varepsilon/2)\}$ gilt

$$\|(a_n + b_n) - (a + b)\| \leq \|a_n - a\| + \|b_n - b\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(b): Sei $\lambda \neq 0$. Dann gilt für $n \geq N_1(\varepsilon/|\lambda|)$ die Abschätzung

$$\|\lambda a_n - \lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a_n - a\| < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$$

Der Fall $\lambda = 0$ ist *trivial*. ■

Konvergenzgeschwindigkeit.

Definition: *Sei (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert a.*

(a) Die Folge (a_n) heißt (mindestens) `linear konvergent`, *falls eine Konstante $0 < C < 1$ und ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert mit*

$$\forall\, n \geq N: \|a_{n+1} - a\| \leq C\|a_n - a\|$$

(b) Die Folge (a_n) heißt (mindestens) `superlinear konvergent`, *falls es eine nicht-negative Nullfolge $C_n \geq 0$ gibt mit $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$, so dass*

$$\forall\, n: \|a_{n+1} - a\| \leq C_n\|a_n - a\|$$

(c) Die Folge (a_n) heißt `konvergent` *der* `Ordnung` *(mindestens) $p > 1$, falls es eine nicht-negative Konstante $C \geq 0$ gibt mit*

$$\forall\, n: \|a_{n+1} - a\| \leq C\|a_n - a\|^p.$$

□

4 Konvergenz von Folgen und Reihen

4.1 Konvergenzkriterien für reelle Folgen

Definition: *Eine reelle Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt*

$$\begin{aligned}
\texttt{monoton wachsend} &\iff \forall n < m : a_n \leq a_m \\
\texttt{streng monoton wachsend} &\iff \forall n < m : a_n < a_m \\
\texttt{nach oben beschränkt} &\iff \exists C \in \mathbb{R} : \forall n : a_n \leq C
\end{aligned}$$

Analog definiert man die Begriffe

$$\begin{aligned}
\texttt{monoton fallend} &\iff \forall n < m : a_n \geq a_m \\
\texttt{streng monoton fallend} &\iff \forall n < m : a_n > a_m \\
\texttt{nach unten beschränkt} &\iff \exists C \in \mathbb{R} : \forall n : a_n \geq C
\end{aligned}$$

□

Satz: *Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte reelle Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent mit Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt. Dann gilt

$$s = \sup\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $N = N(\varepsilon)$ mit

$$s - \varepsilon < a_N \leq s$$

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, also folgt

$$s - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq s \quad \forall\, n \geq N,$$

d.h.

$$|s - a_n| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N \equiv N(\varepsilon)$$

■

Folgerung (Prinzip der Intervallschachtelung):
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton wachsende reelle Folge und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallende reelle Folge mit*

$$a_n \le b_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann sind **beide** *Folgen konvergent. Gilt weiterhin*

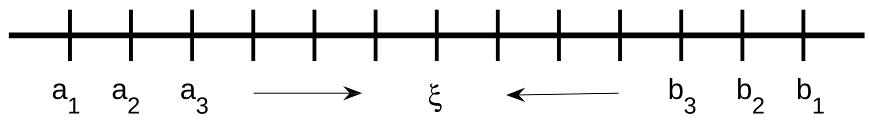
$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0,$$

so haben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *denselben Grenzwert, d.h. es gibt ein* $\xi \in \mathbb{R}$ *mit*

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Weiterhin gelten in diesem Fall die Fehlerabschätzungen

$$|a_n - \xi| \le |b_n - a_n| \qquad \text{und} \qquad |b_n - \xi| \le |b_n - a_n|.$$



□

Beispiel.

Definiere für $0 < a < b$ zwei Folgen (a_n) und (b_n) *rekursiv* durch

$$\begin{aligned} a_0 &:= a & b_0 &:= b \\ a_{n+1} &:= \sqrt{a_n b_n} & b_{n+1} &:= (a_n + b_n)/2 \quad \text{für } n \geq 0. \end{aligned}$$

Die Folgen (a_n) und (b_n) bilden *Intervallschachtelung*, und es gilt

$$(b_{n+1} - a_{n+1}) \leq \frac{b_n - a_n}{2}$$

Der gemeinsame Grenzwert von (a_n) und (b_n)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

heißt arithmetisch-geometrisches Mittel von a und b. □

Die Bernoullische Ungleichung.

Es gilt

$$\forall\, x \geq -1,\ n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx,$$

wobei Gleichheit nur für $n = 1$ oder $x = 0$ gilt.

Beweis: vollständige Induktion.

Die Geometrische Folge.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge mit $a_n := q^n$ für $q \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
q > 1 \quad &: \quad \lim_{n\to\infty} q^n = +\infty \quad (q^n = (1 + (q-1))^n \geq 1 + n(q-1)) \\
q = 1 \quad &: \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 1 \\
0 < q < 1 \quad &: \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \left(q^n = \frac{1}{(1+(1/q-1))^n} \leq \frac{1}{1+n(1/q-1)}\right) \\
-1 < q \leq 0 \quad &: \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (|q^n| = |q|^n) \\
q = -1 \quad &: \quad (q^n) \text{ beschränkt, aber nicht konvergent} \quad (q^n \in \{-1, 1\}) \\
q < -1 \quad &: \quad (q^n) \text{ divergent, kein uneigentlicher Grenzwert}
\end{aligned}$$

Weitere Rechenregeln.

Satz: *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergente reelle Folgen. Dann gilt*

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n)$

(b) $\forall n : b_n \neq 0 \wedge \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

(c) $\forall n : a_n \geq 0 \wedge m \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim_{n\to\infty} a_n}$

Beweis: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

Beweis von (a): Für $\varepsilon > 0$ und $n \geq N \equiv N(\varepsilon)$ gilt

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \\ &\leq C_a \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \\ &< (C_a + |b|)\varepsilon \end{aligned}$$

Beweis von (b): Da $b_n \neq 0$ und $b \neq 0$ existiert eine Konstante $C_b > 0$ mit

$$C_b \leq |b_n| \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit gilt

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| = \frac{1}{|b_n| \cdot |b|} \cdot |b_n - b| \leq \frac{1}{C_b \cdot |b|} \cdot \varepsilon$$

für hinreichend große $n \geq N \equiv N(\varepsilon)$.

Nun folgt die Aussage in Teil (b) direkt aus Teil (a), denn es gilt $1/b_n \to 1/b$.

Beweis von (c): Wir setzen hierzu folgenden Satz voraus.

Satz: Zu $a > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ existiert genau eine Zahl $w > 0$ mit $w^m = a$. Diese Zahl wird mit $w = \sqrt[m]{a}$ bezeichnet.

Fall 1: Sei (a_n) eine Nullfolge und $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

$$a_n < \varepsilon^m \quad \forall\, n \geq N(\varepsilon^m)$$

Daraus folgt

$$0 \leq \sqrt[m]{a_n} < \varepsilon$$

und daher $\sqrt[m]{a_n} \to 0$ für $n \to \infty$.

Fall 2: Sei $a > 0$. Verwende die Identität

$$
\begin{aligned}
(x-y)\sum_{j=1}^{m} x^{m-j}y^{j-1} &= (x-y)\cdot\left(x^{m-1}y^0 + x^{m-2}y^1 + \ldots + x^0y^{m-1}\right) \\
&= x^my^0 + \underbrace{x^{m-1}y^1 + \ldots + x^1y^{m-1} - x^{m-1}y^1 - \ldots - x^1y^{m-1}}_{=0} - x^0y^m \\
&= x^m - y^m
\end{aligned}
$$

Setze nun $x = \sqrt[m]{a_n}$ und $y = \sqrt[m]{a}$. Dann folgt für $\varepsilon > 0$ und $n \geq N(\varepsilon)$:

$$
\begin{aligned}
\left|\sqrt[m]{a_n} - \sqrt[m]{a}\right| &= \frac{|a_n - a|}{\left|(\sqrt[m]{a_n})^{m-1} + \ldots + (\sqrt[m]{a})^{m-1}\right|} \\
&\leq \frac{|a_n - a|}{(\sqrt[m]{a})^{m-1}} \\
&< C\cdot\varepsilon \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$