Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Prof. Dr. Armin Iske
Department Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg-Harburg
Wintersemester 2006/2007

Informationsquellen.

- **Internetseiten.** www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/lehrmaterial/analysis1/ws0607/
- **VORLESUNG!!!**
  Donnerstag, 09:45–11:15, SBS95, Audimax 1, ab 02.11.2006.
- **ÜBUNGEN IN TUTORGRUPPEN!!!**
  Dr. Kai Rothe und Übungsgruppenleiter(innen), ab 2. Woche.
- **ANLEITUNG ZU DEN ÜBUNGEN!!!**
  Dr. Kai Rothe. Dienstag, 15:30–17:00, SBS95, Audimax 1, ab 07.11.2006.
- **SPRECHSTUNDE**
  - **Prof. Iske:** Donnerstag, 08:30-09:30 Uhr, SBS95, 2073.
  - **Dr. Rothe:** Dienstag, 15:00-16:00 bzw. 14:00-15:00, SBS95, 2073.

Literaturquellen.

PRIMÄR:

- R. Ansorge, H. J. Oberle: Mathematik für Ingenieure 1, 3. Auflage. WILEY-VCH, Berlin, 2000.
- H. J. Oberle, K. Rothe, Th. Sonar: Mathematik für Ingenieure, Band 3: Aufgaben und Lösungen. WILEY-VCH, Berlin, 2000.

SEKUNDÄR:

- K. Meyberg, P. Vachenauer: Höhere Mathematik, Bände 1 und 2. Springer, Berlin.
- K. Burg, H. Haf, F. Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure, Band 1: Analysis. B.G. Teubner, Stuttgart, 1992.

Inhalte Analysis I.

- Aussagen, Logik und Mengen.
- Zahlensysteme, Relationen und Funktionen.
- Folgen, Reihen und Konvergenz.
- Vektorräume und Normen.
- Stetige und gleichmäßig stetige Funktionen.
- Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln.
- Mittelwertsätze, lokale Extrema, Satz von Taylor.
- Regel von de l'Hospital, Kurvendiskussion.
- Fehlerrechnung, Iterationsmethoden und Banachscher Fixpunktsatz.

1 Aussagen, Mengen, Funktionen

1.1 Aussagen

Definition: *Eine Aussage ist eine sprachliche Konstruktion, von der man eindeutig entscheiden kann, ob sie WAHR oder FALSCH ist.*

Beispiele für Aussagen und keine Aussagen:

- Heute ist Donnerstag.
- Jede Primzahl ist ungerade.
- 2 ist eine Primzahl.
- Studieren macht Spaß ... ganz besonders an der TUHH.
- Die TUHH ist Deutschlands jüngste Technische Universität.
- Der HSV steigt nie ab.

Charakteristische Eigenschaft: Aussagen sind entweder WAHR oder FALSCH.

Wahrheitswerte von Aussagen. Sei A eine Aussage. Dann kann man A einen eindeutigen *Wahrheitswert* $w(A)$ zuordnen.

$$\begin{aligned} w(A) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad A \text{ ist falsch;} \\ w(A) = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad A \text{ ist wahr.} \end{aligned}$$

Verknüpfungen von Aussagen. Seien A und B Aussagen.

$\neg A$	:	Negation	"nicht A"
$A \wedge B$	:	Konjunktion	"A und B"
$A \vee B$	:	Disjunktion	"A oder B"
$A \Rightarrow B$	:	Implikation	"aus A folgt B"
$A \Leftrightarrow B$	:	Äquivalenz	"A ist äquivalent zu B"

Wahrheitswertetafeln.

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg A)$	$w(A \wedge B)$	$w(A \vee B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(A \Leftrightarrow B)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Bemerkung: Eine Implikation ist wahr, wenn die *Prämisse* falsch ist. Es gilt

$$A \Rightarrow B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \neg A \vee B$$

Definition:

• Eine Verknüpfung von Aussagen, die für sämtliche Kombinationen von Wahrheitswerten stets eine WAHRE Aussage ergeben, heißt Tautologie.

• Eine Verknüpfung von Aussagen, die für sämtliche Kombinationen von Wahrheitswerten stets eine FALSCHE Aussage ergeben, heißt Kontradiktion.

Beispiel für eine Tautologie.

$$(A \Rightarrow B) \quad \Longleftrightarrow \quad (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Betrachte zum Nachweis die folgende Wahrheitswertetafel.

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(\neg B)$	$w(\neg A)$	$w(\neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(\neg B \Rightarrow \neg A)$	$(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Beispiel für eine Tautologie.

$$\Big((A \Rightarrow B) \wedge \neg B\Big) \quad \Longrightarrow \quad \neg A$$

Betrachte zum Nachweis die folgende Wahrheitswertetafel.

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(\neg B)$	$w((A \Rightarrow B) \wedge \neg B)$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

$w(A)$	$w(B)$	$w((A \Rightarrow B) \wedge \neg B)$	$w(\neg A)$	$w((A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1

Häufig verwendete Tautologien.

(**1**)	$A \vee \neg A$	*tertium no datur*
(**2**)	$\neg(A \wedge \neg A)$	*Widerspruch*
(**3**)	$\neg\neg A \iff A$	*doppelte Verneinung*
(**4**)	$\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$	*de Morgan*
(**5**)	$\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$	*de Morgan*
(**6**)	$(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$	*Kontraposition*
(**7**)	$(A \Rightarrow B) \wedge A \implies B$	*modus ponens*
(**8**)	$(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \implies \neg A$	*modus tollens*
(**9**)	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \implies (A \Rightarrow C)$	*modus barbara*
(**10**)	$A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	*Distributivgesetz*
(**11**)	$A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	*Distributivgesetz*

Aussageformen.

Definition: Eine Aussage, die von Variablen abhängt, heißt `Aussageform`.

Beispiele für Aussageformen.

- x ist eine gerade Zahl;
- x ist größer als y;
- x ist größer als y, und y ist größer als z.

Beachte: Wahrheitswerte von Aussageformen erhält man nur durch Einsetzen von Werten für die einzelnen Variablen.

Beispiel: Definiere Aussageform $A(x, y)$ durch

$$A(x,y) \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 < 2$$

Dann gilt:

- $A(1/2, 1)$ ist wahr, d.h. $w(A(1/2, 1)) = 1$;
- $A(-3, 2)$ ist falsch, d.h. $w(A(-3, 2)) = 0$.

Quantoren.

Mathematische Aussagen werden häufig durch Kombination von Aussageformen mit *Quantoren* formuliert.

Es gibt zwei Grundquantoren:

- $\forall$ `Allquantor`;
- $\exists$ `Existenzquantor`;

und weiterhin

- $\exists_1$ `Existenz mit Eindeutigkeit`.

Sei $A(x)$ eine Aussageform. Dann definieren wir neue Aussagen wie folgt.

- $\forall\, x : A(x)$, d.h. für alle x gilt $A(x)$;
- $\exists\, x : A(x)$, d.h. es gibt *mindestens* ein x, für das $A(x)$ gilt;
- $\exists_1\, x : A(x)$, d.h. es gibt *genau* ein x, für das $A(x)$ gilt.

Quantoren.

Die Wahrheitswerte der einzelnen Aussagen werden entsprechend definiert:

$$w(\forall\, x : A(x)) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{für alle } x \text{ ist } w(A(x)) = 1$$

$$w(\exists\, x : A(x)) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es gibt \textit{mindestens} ein } x, \text{ so dass } w(A(x)) = 1$$

$$w(\exists_1\, x : A(x)) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es gibt \textit{genau} ein } x, \text{ so dass } w(A(x)) = 1$$

Negation von Quantoren.

Es gilt

$$\neg\Big(\forall\, x : A(x)\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, x : \Big(\neg A(x)\Big)$$

$$\neg\Big(\exists\, x : A(x)\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, x : \Big(\neg A(x)\Big)$$

Mathematische Sätze und Beweistechniken.

Standardform eines Satzes:

$$A \quad \Longrightarrow \quad B, \qquad \text{für Aussagen } A, B,$$

wobei A Voraussetzung (Prämisse) und B Behauptung (Konklusion) heißt.

Mögliche Beweistechniken:

- **Direkter Beweis** (Kettenschluss)

$$A = A_0 \Longrightarrow A_1 \Longrightarrow A_2 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow A_n = B$$

- **Indirekter Beweis** (Kontraposition, Widerspruch)

$$A \Longrightarrow B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \neg B \Longrightarrow \neg A$$

  ist eine Tautologie.

Exemplarisches Beispiel für einen ersten Beweis.

Satz: *Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann gerade, wenn ihr Quadrat n^2 gerade ist, d.h. für $n \in \mathbb{N}$ gilt die Äquivalenz*

$$n \textit{ gerade} \quad \Longleftrightarrow \quad n^2 \textit{ gerade.}$$

Beweis: Führe den Beweis in zwei Schritten:

1. Schritt: Zeige die Implikation

$$n \text{ gerade} \quad \Longrightarrow \quad n^2 \text{ gerade.}$$

2. Schritt: Zeige die Implikation

$$n^2 \text{ gerade} \quad \Longrightarrow \quad n \text{ gerade.}$$

1. Schritt: Direkter Beweis.

Sei n gerade. Dann $\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k$

$$n = 2k \quad \Longrightarrow \quad n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \quad \Longrightarrow \quad n^2 \text{ gerade.}$$

2. Schritt: Indirekter Beweis. (zeige $\neg B \Rightarrow \neg A$ statt $A \Rightarrow B$)

Sei n^2 gerade. Angenommen n ist ungerade. Dann $\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k - 1$.

$$\begin{aligned} n = 2k - 1 \quad &\Longrightarrow \quad n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k) + 1 \\ &\Longrightarrow \quad n^2 \text{ ungerade.} \end{aligned}$$

Dies ist aber ein *Widerspruch* zur Annahme (n^2 gerade). ■

Ein weiteres exemplarisches Beweisbeispiel.

Satz: *Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational, d.h. $\sqrt{2}$ läßt sich nicht als Bruch $\sqrt{2} = n/m$ mit natürlichen Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ darstellen.*

Beweis (durch Widerspruch) **:** Annahme: $\exists n, m \in \mathbb{N} : \sqrt{2} = \frac{n}{m}$.

Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass n und m teilerfremd sind.
Denn ansonsten teilen wir m, n durch deren größten gemeinsamen Teiler (ggT).

Dann gilt:

$$2m^2 = n^2 \quad \Longrightarrow \quad n^2 \text{ gerade} \quad \Longrightarrow \quad n \text{ gerade} \quad \Longrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k.$$

Einsetzen in $2m^2 = n^2$ ergibt:

$$2m^2 = n^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Longrightarrow m^2 = 2k^2 \Longrightarrow m^2 \text{ gerade} \Longrightarrow m \text{ gerade.}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass n und m teilerfremd sind.

Die Annahme $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ ist somit falsch $\Rightarrow$ $\sqrt{2}$ ist irrational. ■