Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2006/07**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 9:

Man untersuche die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

$$a_n = \frac{n^2-1}{2n^3}\left(\frac{3n^2+1}{n+1} - \frac{8n^2-1}{n-1}\right), \qquad b_n = \left(1+\frac{3}{5n}\right)^{10n},$$

$$c_n = \frac{4^n+(-5)^n}{(-4)^n+5^n}, \qquad d_n = \frac{(2-2i)^n}{(1+3i)^n},$$

$$e_n = \sqrt{9n^3+2n^{3/2}+(-1)^n} - 3n^{3/2}, \qquad f_n = \frac{1+2^n+3^{n+1}+4^{n+2}+5^{n+3}}{5^{n+1}}.$$

Aufgabe 10:

Man untersuche die folgenden rekursiv definierten Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

a) $a_1 = \frac{12}{7}$, $a_{n+1} = \frac{1}{4}(5-3a_n)$

b) $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_{n+1} = \frac{b_n^2+3}{4}$

c) $c_1 = 5$, $c_{n+1} = \frac{7}{4-c_n}$

d) $d_1 = 3$, $d_{n+1} = \sqrt{2+d_n}$

Aufgabe 11:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\quad f(x) = x^2 - x - 6\,, \quad$ sowie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die sich aus dem Newton-Verfahren zur Nullstellenberechnung von f mittels Startwert $x_0 \geq 3$ ergibt.

a) Man zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Nullstelle x^* konvergiert und berechne diese.

b) Man zeige, dass die Folge (lokal) quadratisch konvergiert, d.h. es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$|x_{n+1} - x^*| \leq c|x_n - x^*|^2\,.$$

Aufgabe 12:

Man zeige, dass die rekursiv definierte Folge

$$x_0 = a\,, \quad x_1 = b\,, \quad x_{n+1} = x_n + 6x_{n-1}$$

folgende explizite Darstellung besitzt:

$$x_n = \frac{(2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-2)^n)\,a + (3^n - (-2)^n)\,b}{5}\,.$$

Hinweis: Für den Beweis eignet sich die vollständige Induktion.

Abgabetermin: 11.12. - 14.12.06 (zu Beginn der Übung)