4.2 Differentialrechnung einer Variablen

Zunächst: Einleitung auf Folie

Sekantensteigung und Differenzenquotient

liefern im Grenzwert

Tangentensteigung und Ableitung
(Differentialquotient)

Definition: Gegeben sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ und ein $x_0 \in D \cap D'$.

1) Für ein $x \in D$, $x \neq x_0$ nennt man den Ausdruck
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
Differenzenquotient (Sekantensteigung) bezüglich des Punktes x.

2) Die Funktion $f(x)$ heißt **differenzierbar** im Punkt x_0, falls der Grenzwert
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
existiert. Man nennt den Grenzwert dann

die Ableitung oder **den Differentialquotienten**

der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 und schreibt
$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Definition: (Fortsetzung)

3) Die einseitigen Grenzwerte

$$f'(x_0^+) \ := \ \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0^-) \ := \ \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

heißen **rechtsseitige bzw. linksseitige Ableitung** von $f(x)$ an der Stelle x_0.

Eine **Interpretation** der Ableitung einer Funktion:

Die Bewegung eines Massenpunktes sei beschrieben durch eine Funktion

$$c : I \to \mathbb{R}^3, \quad c = c(t), \quad I \subset \mathbb{R}$$

wobei t die Zeit und $c(t)$ den Ort des Massenpunktes bezeichnet.
Die Ableitung

$$\dot{c}(t_0) := \frac{dc}{dt}(t_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}$$

ist dann die

Geschwindigkeit

mit der sich der Massenpunkt bewegt.

Beispiele zur Berechnung der Ableitung:

1) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Dann gilt für beliebige $x, x_0 \in \mathbb{R}$

$$x^n - x_0^n = (x - x_0) \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} x_0^j$$

Damit gilt für $x \neq x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} x_0^j = n x_0^{n-1}$$

Die Funktion $f(x) = x^n$ ist damit auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und

$$f'(x) = n x^{n-1}$$

Beispiele zur Berechnung der Ableitung: (Fortsetzung)

2) Sind die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ differenzierbar, so sind auch

$$f(x) + g(x) \qquad \text{und} \qquad \lambda f(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

differenzierbare Funktionen.

3) Aus 2) und $f'(x) = 0$ für $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, folgt

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \; k \; x^{k-1}$$

4) Bei vektorwertigen Funktionen wird die Ableitung **komponentenweise** berechnet, zum Beispiel

$$f(x) = (x, e^x, \sin x)^T \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (1, e^x, \cos x)^T$$

$$f(x) = (\cos t, \sin t)^T \quad \Rightarrow \quad f'(t) = (-\sin t, \cos t)^T$$

Beispiele zur Berechnung der Ableitung: (Fortsetzung)

5) Ableitungen von **elementaren** Funktionen

Funktion	**Ableitung**	
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$(\alpha \in \mathbb{R}, x > 0)$
e^x	e^x	$(x \in \mathbb{R})$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(x > 0)$
$\sin x$	$\cos x$	$(x \in \mathbb{R})$
$\cos x$	$-\sin x$	$(x \in \mathbb{R})$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$

Satz: (Wichtige Differentiationsregeln)

1) Ist $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ in $x_0 \in D^0$ differenzierbar, so ist die Funktion dort auch stetig.

2) Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ in $x_0 \in D^0$ differenzierbar, so ist für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$ auch $\alpha f + \beta g$ in x_0 differenzierbar, und es gilt

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

3) Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ in $x_0 \in D^0$ differenzierbar, so ist auch die Funktion $f \cdot g$ in x_0 differenzierbar, und es gilt die **Produktregel**:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist auch $f(x)/g(x)$ in x_0 differenzierbar, und es gilt die **Quotientenregel**:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

4) Seien $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ ($D, E \subset \mathbb{R}$) und $x_0 \in D^0 \cap (f^{-1}(E))^0$. Sind dann f und g differenzierbar in x_0 bzw. $f(x_0)$, so ist auch die Hintereinanderausführung $g \circ f$ in x_0 differenzierbar, und es gilt die **Kettenregel**:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

5) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und in $x_0 \in [a, b]$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ in $f(x_0)$ differenzierbar, und es gilt:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad (y_0 = f(x_0))$$

6) Ist $\langle ., . \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform, und sind $f, g : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}$ in $x_0 \in D^0$ differenzierbar, so ist auch die Funktion $\langle f, g \rangle$ in x_0 differenzierbar, und es gilt die **verallgemeinerte Produktregel**:

$$\frac{d}{dx} \langle f(x), g(x) \rangle \Big|_{x = x_0} = \langle f'(x_0), g(x_0) \rangle + \langle f(x_0), g'(x_0) \rangle$$

Definition: Ist eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt $x_0 \in [a, b]$ differenzierbar, so ist die Ableitung wiederum eine Funktion

$$f' : [a, b] \to \mathbb{R}$$

Ist f' wiederum differenzierbar, so erhält man hiermit die zweite Ableitung f'' von f, u.s.w.

Ist $f(x)$ n–mal differenzierbar auf $[a, b]$ und ist zudem die n–te Ableitung $f^{(n)}(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ stetig, so heißt die Funktion $f(x)$ **n–mal stetig differenzierbar** oder auch **$\mathbf{C^n}$–Funktion**.

Gilt dies sogar für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, so nennt man $f(x)$ eine **$\mathbf{C^\infty}$–Funktion**.

$f \in C^0([a, b]) \quad :\Leftrightarrow \quad f$ stetig auf $[a, b]$

$f \in C^n([a, b]) \quad :\Leftrightarrow \quad f$ n–mal stetig differenzierbar auf $[a, b]$

$f \in C^\infty([a, b]) \quad :\Leftrightarrow \quad f$ beliebig oft stetig differenzierbar auf $[a, b]$