

3.3 Folgen in Vektorräumen

Abschnitt 3.2: Konvergenzkriterien für reelle Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}$

Sei nun $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum.

Wiederholung aus Abschnitt 3.2:

Definition: Konvergenz von Folgen

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in V (Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$)

...

3) Eine Folge (a_n) heißt **konvergent** mit **Grenzwert (Limes)** $a \in V$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \|a_n - a\| < \varepsilon$$

...

Beispiel: (Unendlich–dimensionale) Funktionenräume

88

Endlich–dimensionale Vektorräume (zum Beispiel \mathbb{R}^n)

Satz: (Normäquivalenzsatz)

Je zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ eines endlichdimensionalen Vektorraums V sind **äquivalent**, d.h. es gibt positive Konstanten $C_1, C_2 > 0$ mit

$$\forall v \in V : C_1 \|v\| \leq \|v\|' \leq C_2 \|v\|$$

Konvergenz und Grenzwert einer Folge sind unabhängig von der Norm.

Folgerung: Eine Folge (x_m) im \mathbb{R}^n konvergiert genau dann, wenn alle n Koordinatenfolgen $(x_j^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$, $j = 1, \dots, n$ konvergieren. Der Grenzwert der Folge lässt sich komponentenweise berechnen.

Beispiel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}, 1 + \exp\left(\frac{1}{n}\right), \frac{n^2 + 2n + 3}{2n^2 - 1} \right)^T = \left(0, 2, \frac{1}{2} \right)^T$$

89

In endlichdimensionalen Vektorräumen gilt daher auch

- das **Cauchysche Konvergenzkriterium**

$$\exists \mathbf{a} : \mathbf{a}_m \rightarrow \mathbf{a} \quad (m \rightarrow \infty)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : m, n \geq N : \|\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_n\| < \varepsilon$$

- und der **Satz von Bolzano, Weierstraß**

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge

Beispiel: Für $a_n := z^n$, $z \in \mathbb{C}$ gegeben, gilt

$$|z| > 1 \Rightarrow |a_n| = |z|^n \text{ unbeschränkt} \Rightarrow (a_n) \text{ divergent}$$

$$|z| < 1 \Rightarrow |a_n| = |z|^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$$

90

3.4 Konvergenzkriterien für Reihen

Definition: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine vorgegebene Folge mit $a_n \in \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} .
Dann ist $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_k$$

eine

Reihe (in \mathbb{R} oder \mathbb{C})

Die Elemente s_n der Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ nennt man auch **Partialsummen**.

Ist die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergent, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, so bezeichnet

$$s := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

den **Grenzwert der Reihe**.

91

Satz: (Konvergenzkriterien für Reihen)

1) Cauchysches Konvergenzkriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : m, n \geq N : \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon$$

2) Notwendige Bedingung

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$$

3) Linearität

Sind $\sum a_k, \sum b_k$ konvergente Reihen, so konvergieren auch die Reihen $\sum(a_k + b_k), \sum(\lambda a_k)$, und es gelten

92

3) Linearität (Fortsetzung)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \\ \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k) &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k \end{aligned}$$

4) Leibnizsches Kriterium

Alternierende Reihen der Form $\sum (-1)^k a_k, a_k \geq 0$, für die $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge bilden, sind konvergent, und es gilt die **Einschließung**:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k$$

93

Beweis zu 4): Seien

$$u_n := \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k a_k \quad v_n := \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k$$

Dann folgt

$$u_{n+1} = u_n + (a_{2n} - a_{2n+1}) \geq u_n$$

$$v_{n+1} = v_n - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \leq v_n$$

$$v_n = u_n + a_{2n} \geq u_n$$

$$v_n - u_n = a_{2n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Folgen (u_n) , (v_n) bilden Intervallschachtelung, konvergieren gegen gemeinsamen Grenzwert und

$$u_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \leq v_n$$

94

Beispiel: Die **geometrische Reihe** $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \dots$, $q \in \mathbb{C}$ konvergiert für $|q| < 1$, denn für die Partialsummen gilt wegen

$$x^m - y^m = (x - y) \sum_{j=1}^m x^{m-j} y^{j-1}$$

mit $x = 1$, $y = q$ und $m = n + 1$

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Daraus folgt

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}}$$

Für $|q| > 1$ ist die geometrische Reihe divergent.

95

Beispiel: Die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

ist divergent.

Es gilt

$$\sum_{k=n}^m \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n}^m \frac{1}{m} = \frac{m-n+1}{m} \rightarrow 1 \quad (m \rightarrow \infty)$$

Damit ist das Cauchy-Kriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : m, n \geq N : \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon$$

für $\varepsilon < 1$ verletzt.

96

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} =$
 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ ist konvergent.

Dies zeigt man mit Hilfe des Leibnizschen Kriteriums:

Zur Erinnerung: **alternierende Reihen**, deren Folgenglieder eine Nullfolge mit monoton fallenden Beträgen bilden, sind konvergent.

Der Grenzwert lautet:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = \ln 2 = 0.69314 \dots$$

97

Definition: Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, falls die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

ist konvergent, aber **nicht** absolut konvergent. Es gilt

$$a_k = (-1)^k \frac{1}{k+1}$$

und daher ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{1}{k+1} \right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

gerade die harmonische Reihe, die **nicht** konvergiert.

98

Satz: (Kriterien für absolute Konvergenz)

1) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\Leftrightarrow \left(\sum_{k=0}^n |a_k| \right)_{n \geq 0}$ beschränkt

2) **Majorantenkriterium**

$$|a_k| \leq b_k \wedge \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

3) **Quotientenkriterium** Sei $a_k \neq 0$ ($\forall k \geq k_0$)

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q < 1 \quad (\forall k \geq k_0) \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

4) **Wurzelkriterium**

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \quad (\forall k \geq k_0) \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

99

Beweis:

zu 1): Die Folge $\left(\sum_{k=0}^n |a_k|\right)$ ist monoton wachsend und daher genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

zu 2): Da $|a_k| \leq b_k$ für alle k gilt, ist $b_k \geq 0$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist nach Voraussetzung konvergent, wegen $b_k \geq 0$ aber auch absolut konvergent.

Nach Teil 1) ist die Folge $\left(\sum_{k=0}^n b_k\right)$ damit beschränkt. Aus

$$\sum_{k=0}^n |a_k| \leq \sum_{k=0}^n b_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

folgt dann, dass die Folge $\left(\sum_{k=0}^n |a_k|\right)$ beschränkt und nach Teil 1) absolut konvergent ist.

100

Beweis: (Fortsetzung)

zu 3): Aus $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$ ($\forall k \geq k_0$) folgt mit vollständiger Induktion direkt

$$|a_k| \leq q^{k-k_0} |a_{k_0}|$$

und somit für alle n

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n |a_k| &\leq \sum_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + |a_{k_0}| \sum_{j=0}^{n-k_0} q^j \\ &\leq \underbrace{\sum_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + |a_{k_0}|}_{\text{Beschränktheitskonstante}} \frac{1}{1-q} \end{aligned}$$

Nach Teil 1) ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

101

Beweis: (Fortsetzung)

zu 4): Aus $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$ ($k \geq k_0$) folgt direkt $|a_k| \leq q^k$ für alle $k \geq k_0$. Wie in Teil 3) folgt daraus

$$\sum_{k=0}^n |a_k| \leq \sum_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + |a_{k_0}| \frac{q^{k_0}}{1-q} \Rightarrow \sum_{k=0}^n a_k \text{ absolut konvergent}$$

Bemerkung:

a) Das Quotienten- bzw. Wurzelkriterium ist erfüllt, falls gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$

b) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist dagegen divergent, falls gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$$

102

Beispiel: Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

Es gilt

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

und daher

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Die Reihe ist also (absolut) konvergent.

103

Beispiel: Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \quad (r \in \mathbb{N}, r \geq 2)$$

Nach dem letzten Beispiel gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^r} &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \\ &< 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} < 2 \end{aligned}$$

Damit ist die Reihe (absolut) konvergent.

Einige Grenzwerte

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}$$