

1.3 Funktionen

Seien M und N Mengen

$$f : M \rightarrow N \Leftrightarrow \forall x \in M : \exists_1 y \in N : y = f(x)$$

nennt man **Funktion** oder Abbildung.

Beachte: Zuordnung ist eindeutig.

Bezeichnungen:

M : Definitionsbereich

N : Bildbereich (Zielmenge) von f

Der Graph einer Funktion:

$$\text{graph}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in M\} \subset M \times N$$

21

Sei $A \subset M$: das **Bild** von A unter der Funktion f ist gegeben durch

$$f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$$

Für $B \subset N$ nennt man

$$f^{-1}(B) := \{a \in M \mid f(a) \in B\}$$

das **Urbild** von B unter der Funktion f .

Eine Funktion f ist

surjektiv, falls $f(x) = y$ stets wenigstens eine Lösung hat, d.h.

$$\forall y \in N \exists x \in M : y = f(x)$$

injektiv, falls $f(x) = y$ stets höchstens eine Lösung hat, d.h.

$$\forall x_1, x_2 \in M : (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

22

Eine Funktion f ist

bijektiv, falls f gleichzeitig injektiv und surjektiv ist

Injektive Funktionen besitzen eine **Umkehrfunktion**

$$f^{-1} : f(M) \rightarrow M : f^{-1}(f(x)) = x$$

Ist f bijektiv so gilt

$$M \xrightarrow{f} N \quad N \xrightarrow{f^{-1}} M$$

Bemerkung:

Die Umkehrfunktion einer reellwertigen Funktion einer reellen Variablen erhält man durch Spiegelung an der Diagonalen

23

Komposition von Funktionen:

Sei $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow P$. Definiere

$$g \circ f : M \rightarrow P, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Eigenschaften der Komposition:

a) assoziativ

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

b) in der Regel **nicht** kommutativ

$$g \circ f \neq f \circ g$$

c) Sei M Menge eine Menge, setze

$$S(M) := \{f : M \rightarrow M \mid f \text{ bijektiv}\}$$

nennt man **symmetrische Gruppe** von M

24

Die **symmetrische Gruppe** von M

Gruppenaxiome

- G1) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (Assoziativgesetz)
G2) $f \circ id_M = id_M \circ f = f$ (neutrales Element)
G3) $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_M$ (inverses Element)

Dabei ist id_M die Identität (als Funktion), d.h.

$$id_M(x) = x$$

und f^{-1} die Umkehrfunktion von f .

25

Elementare Funktionen:

a) Affin–lineare Funktion

$$y = f(x) = a_1x + a_0$$

Der Graph ist eine Gerade in der euklidischen Ebene

b) Polynome

$$y = f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

Dabei bezeichnet n den Grad des Polynoms

c) Exponentialfunktion

$$y = f(x) = a^x \quad (a > 0, a \text{ reell})$$

Für die Exponentialfunktion gilt

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

26

c) Exponentialfunktion (Fortsetzung)

Speziell: Exponentialfunktion $y = e^x$, zum Beispiel definiert durch

$$f'(0) = 1 \Rightarrow e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \approx 2.718281828 \dots$$

(Eulersche Zahl)

d) Logarithmus

$$y = f(x) = \log_a x, \quad a > 0, a \neq 1$$

Umkehrfunktion der Exponentialfunktion (\Rightarrow nur definiert für positive x)

Für den Logarithmus gilt

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

Speziell: natürlicher Logarithmus $y = \ln x$ (Basis e) mit

$$\ln 1 = 0 \quad \ln e = 1$$

27

e) Trigonometrische Funktionen

Bogenmaß: $0^\circ = \varphi = 0$, $45^\circ = \varphi = \frac{\pi}{4}$, $90^\circ = \varphi = \frac{\pi}{2}$

Kreiszahl $\pi = 3.141592563 \dots$

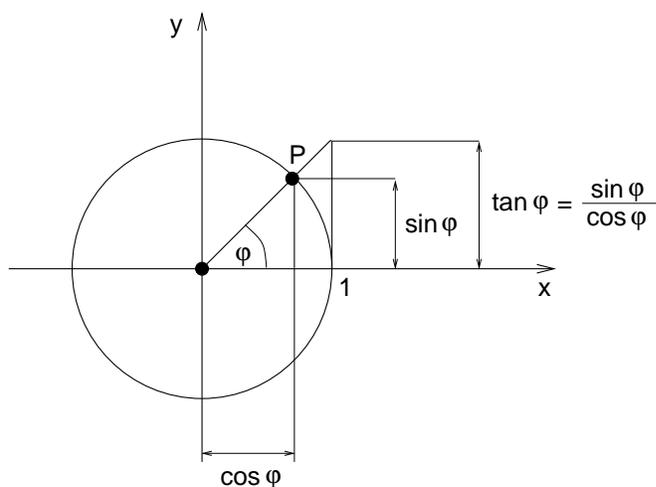


Bild: Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis

28

Eigenschaften:

Es gelten:

$$(i) \quad \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

$$(ii) \quad \sin(-\varphi) = -\sin(\varphi), \quad \cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$$

$$(iii) \quad \cos(\varphi + 2\pi) = \cos(\varphi), \quad \sin(\varphi + 2\pi) = \sin(\varphi)$$

(iv) Wertetafel:

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin \varphi$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos \varphi$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

(v) Additionstheoreme

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

29

Kapitel 2: Zahlenbereiche

2.1 Natürliche Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

wird **abstrakt** durch die **Peano-Axiome** definiert:

$$(A1) \quad 1 \in \mathbb{N}$$

$$(A2) \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n + 1) \in \mathbb{N}$$

$$(A3) \quad n \neq m \Rightarrow (n + 1) \neq (m + 1)$$

$$(A4) \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n + 1) \neq 1$$

(A5) für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ gilt :

$$1 \in A \wedge (\forall n : [n \in A \Rightarrow (n + 1) \in A]) \Rightarrow A = \mathbb{N}$$

Die **Nachfolgeabbildung** $n \rightarrow (n + 1)$ ist eine injektive Abbildung

31

Das **Vollständigkeitsaxiom** (A5) ist Grundlage des

Beweisprinzips der vollständigen Induktion

Zu beweisen sei:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: die Aussage $A(n)$ ist wahr, also

$$\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$$

Dabei ist $A(n)$ eine Aussageform, die von $n \in \mathbb{N}$ abhängt.

32

Gelten nun

$$A(1) \quad \textbf{(Induktionsanfang)}$$

und für beliebiges $n \in \mathbb{N}$

$$A(n) \Rightarrow A(n + 1) \quad \textbf{(Induktionsschluss)}$$

so ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Wichtig:

Induktionsschluss muss für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$ bewiesen werden

Man nennt daher

$A(n)$ die **Induktionsannahme**

$A(n + 1)$ die **Induktionsbehauptung**

33

Beispiel: Anzahl t_n der Teilmengen einer n -elementigen Menge

Finde eine Formel für t_n , die für *kleine* $n \in \mathbb{N}$ gilt:

für $n = 1$ $A_1 = \{a_1\}$
Teilmengen: $\emptyset, \{a_1\}$
es gibt $t_1 = 2$ Teilmengen

für $n = 2$ $A_2 = \{a_1, a_2\}$
Teilmengen: $\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}$
es gibt $t_2 = 4$ Teilmengen

Es gilt: $t_1 = 2 = 2^1$, $t_2 = 4 = 2^2$

Vermutung: Allgemein gilt

$$t_n = 2^n$$

d.h. eine n -elementige Menge besitzt genau 2^n Teilmengen

34

Satz: Eine n -elementige Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ besitzt 2^n Teilmengen

Beweis: (durch vollständige Induktion)

$n = 1$: Wie gezeigt, gilt $t_1 = 2$

$n \rightarrow n + 1$: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest.

Induktionsvoraussetzung: Eine n -elementige Menge hat 2^n Teilmengen

Zu beweisen ist: $A = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\}$ hat 2^{n+1} Teilmengen.

Setze $\mathcal{P}(A) = K_1 \cup K_2$ mit

$$T \in K_1 \quad :\Leftrightarrow \quad a_{n+1} \notin T$$

$$T \in K_2 \quad :\Leftrightarrow \quad a_{n+1} \in T$$

Nach Induktionsvoraussetzung besitzt K_1 genau 2^n Elemente, denn die Elemente aus K_1 sind gerade die Teilmengen von $A' = \{a_1, \dots, a_n\}$.

35

Jedes Element aus K_2 hat die Form

$$T = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}, a_{n+1}\}$$

wobei

$$\{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\} \subset K_1$$

Also besitzt die Menge K_2 wieder nach Induktionsvoraussetzung ebenfalls 2^n Elemente.

Nach Konstruktion gilt

$$K_1 \cap K_2 = \emptyset$$

Daraus folgt aber, dass $\mathcal{P}(A)$ genau $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ Elemente besitzt.

36

Beispiel: Wieviele Vertauschungen (Permutationen) des n -Tupels $(1, 2, \dots, n)$ gibt es?

Suche wiederum eine Formel für kleine $n \in \mathbb{N}$:

$n = 1$: (1) : 1 Permutation
 $n = 2$: (1,2), (2,1) : 2 Permutationen
 $n = 3$: (1,2,3), (1,3,2)
(2,3,1), (2,1,3) : 6 Permutationen
(3,1,2), (3,2,1)

Es gilt: $p_1 = 1$, $p_2 = 2 = 1 \cdot 2$, $p_3 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$

Vermutung: Allgemein gilt

$$p_n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$$

d.h. ein n -Tupel besitzt genau $n!$ Permutationen.

37

Satz: Es gibt $p_n := n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ Permutationen des n -Tupels $(1, 2, \dots, n)$ (bzw. (a_1, \dots, a_n) , a_i paarweise verschieden)

Beweis: (durch vollständige Induktion)

$n = 1$: Wie gezeigt, gilt $p_1 = 1$

$n \rightarrow n + 1$: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest

Induktionsvoraussetzung: Ein n -Tupel besitzt $n!$ Permutationen

Zu beweisen ist: Das $(n + 1)$ -Tupel besitzt $(n + 1)!$ Permutationen

Betrachte spezielle Permutation

$$(k, i_1, \dots, i_n)$$

wobei (i_1, \dots, i_n) Permutation der Menge $(1, \dots, k - 1, k + 1, \dots, n + 1)$.

$\Rightarrow n + 1$ paarweise disjunkte Klassen von Permutationen \Rightarrow

$$p_{n+1} = (n + 1) \cdot p_n = (n + 1)!$$

38

Folgerung:

Eine n -elementige Menge $\{a_1, \dots, a_n\}$ besitzt genau

$$\binom{n}{m} := \frac{n!}{m!(n - m)!}$$

m -elementige Teilmengen. Dies gilt für alle ganzen Zahlen $0 \leq m \leq n$, wobei zusätzlich $0! := 1$ gesetzt wird.

Beweis: Vollständige Induktion unter Verwendung des nächsten Satzes

Bezeichnung:

Die natürlichen Zahlen $\binom{n}{m}$ nennt man **Binomialkoeffizienten**.

39

Satz:

a) Für $n, m \in \mathbb{N}$, $0 < m \leq n$, gilt die Rekursionsformel:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}$$

b) Für reelle (und auch komplexe) a, b und $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt der

Binomische Lehrsatz:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

40

Definition:

Allgemeine Summen und Produkte

$$\sum_{k=m}^n b_k := b_m + b_{m+1} + \dots + b_n \quad (\text{falls } m \leq n)$$

$$\sum_{k=m}^n b_k := 0 \quad (\text{falls } m > n, \text{ leere Summe})$$

$$\prod_{k=m}^n b_k := b_m \cdot b_{m+1} \cdot \dots \cdot b_n \quad (\text{falls } m \leq n)$$

$$\prod_{k=m}^n b_k := 1 \quad (\text{falls } m > n, \text{ leeres Produkt})$$

41

Definition:

Potenzen

$$a^n := \prod_{k=1}^n a \quad \text{für } n \geq 0$$

$$a^n := 1/(a^{-n}) \quad \text{für } n < 0$$

Dann gelten die Potenzgesetze:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

42

Satz:a) Für $n, m \in \mathbb{N}$, $0 < m \leq n$, gilt die Rekursionsformel:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}$$

b) Für reelle (und auch komplexe) a, b und $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt der**Binomische Lehrsatz:**

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

43

Beweis zu a): $(n, m \in \mathbb{N}, 0 < m \leq n)$

$$\begin{aligned}\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} &= \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} \\ &= \frac{n!(n-m+1) + n!m}{m!(n+1-m)!} \\ &= \frac{n!(n+1-m+m)}{m!(n+1-m)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!} \\ &= \binom{n+1}{m}\end{aligned}$$

44

Beweis zu b): (vollständige Induktion)

$n = 1$:

$$(a+b)^1 = a+b = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0$$

$n \rightarrow n+1$:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \stackrel{\text{Ind.vor.}}{=} (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &\stackrel{j=k+1}{=} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\end{aligned}$$

45

$$\begin{aligned}
& \stackrel{j=k+1}{=} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 \\
&= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

denn

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$$

46

Berechnung der Binomialkoeffizienten mit Hilfe des

Pascalsches Dreieck

				1						
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1
...

Beispiel: Binomischer Lehrsatz

$$\begin{aligned}
(a+b)^5 &= 1 \cdot a^0 b^5 + 5 \cdot a^1 b^4 + 10 \cdot a^2 b^3 + 10 \cdot a^3 b^2 + 5 \cdot a^4 b^1 + 1 \cdot a^5 b^0 \\
&= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5
\end{aligned}$$

47