Analysis I für
Studierende der Ingenieurwissenschaften

Jens Struckmeier

Fachbereich Mathematik

Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg

Wintersemester 2005/2006

Kapitel 1: Aussagen, Mengen und Funktionen

1.1 Aussagen

Beispiele für Aussagen sind:

- 5 ist eine gerade Zahl
- 16 ist eine Quadratzahl
- heute ist Donnerstag
- heute scheint die Sonne

Kennzeichnende Eigenschaft:

Aussagen sind entweder **wahr** oder **falsch**

Wahrheitswerte: Sei A eine Aussage

$$\begin{aligned} w(A) = 0 \quad &:\Leftrightarrow \quad A \text{ ist falsch} \\ w(A) = 1 \quad &:\Leftrightarrow \quad A \text{ ist wahr} \end{aligned}$$

Verknüpfung von Aussagen:

$\neg A$	:	Negation
$A \wedge B$	:	Konjunktion
$A \vee B$	:	Disjunktion
$A \Rightarrow B$	:	Implikation
$A \Leftrightarrow B$	:	Äquivalenz

Wahrheitswertetafeln:

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg A)$	$w(A \wedge B)$	$w(A \vee B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(A \Leftrightarrow B)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Beachte:

Eine Implikation ist immer wahr, wenn die Prämisse falsch ist.

Also gilt: $A \Rightarrow B \;\Leftrightarrow\; \neg A \vee B$

Tautologien:

Aussagen, die unabhängig von Wahrheitswerten immer wahr sind

Beispiel:

$$((A \Rightarrow B) \wedge \neg B) \;\Rightarrow\; \neg A$$

Wahrheitswertetafel:

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(\neg B)$	$w((A \Rightarrow B) \wedge \neg B)$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

$w(A)$	$w(B)$	$w((A \Rightarrow B) \wedge \neg B)$	$w(\neg A)$	$w((A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1

Beispiel:

Man zeige

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Wahrheitswertetafel:

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg(A \vee B))$	$w(\neg A \wedge \neg B)$	$w(\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B)$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	1	1

Aussageformen: von **Variablen** abhängige Aussagen

Beispiele: Aussagen $A(x)$ (einstellig) oder $A(x, y)$ (zweistellig)

- x ist eine gerade Zahl
- x ist größer als y
- x ist eine Quadratzahl
- $x + y$ ist kleiner 1

Wahrheitswerte erhält man nur durch Einsetzen von Variablen

Beispiel: Wir definieren eine Aussageform als

$$A(x, y) :\Leftrightarrow x^2 + y^2 < 2$$

Dann gilt zum Beispiel

- $A(1/2, 1)$ ist **wahr**
- $A(-3, 2)$ ist **falsch**

Quantoren $\forall$, $\exists$ und $\exists_1$:

Mathematische Aussagen werden häufig mit Quantoren formuliert.

Sei $A(x)$ eine Aussageform, die von einer Variablen abhängt. Wir definieren drei neue Aussagen, wie oben durch Angabe der Wahrheitswerte:

$$\begin{array}{lcl} w(\forall\, x : A(x)) = 1 & \Leftrightarrow & \text{Für alle } x \text{ ist } w(A(x)) = 1 \\ w(\exists\, x : A(x)) = 1 & \Leftrightarrow & \text{Es gibt (mindestens) ein } x, \text{ so dass } w(A(x)) = 1 \\ w(\exists_1\, x : A(x)) = 1 & \Leftrightarrow & \text{Es gibt genau ein } x, \text{ so dass } w(A(x)) = 1 \end{array}$$

Beispiel: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **stetig** im Punkt $x_0 \in \mathbb{R} :\Leftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \ \exists\, \delta > 0 : \ \forall\, x \in D :$$
$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

((ε, δ)–Definition der Stetigkeit)

Negation von Quantoren:

Es gilt

$$\neg(\forall\, x : A(x)) \ \Leftrightarrow \ \exists\, x : (\neg A(x))$$
$$\neg(\exists\, x : A(x)) \ \Leftrightarrow \ \forall\, x : (\neg A(x))$$

Beispiele:

a) Man verneine die Aussage

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \ \forall\, \varepsilon > 0 : \ \exists\, n \in \mathbb{N} : \ x - \varepsilon < n < x + \varepsilon$$

b) Negation des Stetigkeitsbegriffes

$$\neg(\forall\, \varepsilon > 0 : \ \exists\, \delta > 0 : \ \forall\, x \in D :$$
$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Mathematische Sätze und Beweistechniken

Standardform eines Satzes

$$A \quad \Rightarrow \quad B, \qquad A,\ B \quad \text{Aussagen}$$

A : Voraussetzung (Prämisse) $\qquad B$: Behauptung (Konklusion)

Beweistechniken:

- **Direkter Beweis** (Kettenschluss)

$$A =: A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_n := B$$

- **Indirekter Beweis** (Kontraposition, Widerspruch)

$$A \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \neg B \Rightarrow \neg A$$

  ist eine Tautologie

Satz: Für eine natürliche Zahl n gilt: n gerade $\Leftrightarrow n^2$ gerade.

Beweis:

Führe den Beweis in zwei Schritten:

1. Schritt:

$$n \text{ gerade} \Rightarrow n^2 \text{ gerade}$$

2. Schritt:

$$n^2 \text{ gerade} \Rightarrow n \text{ gerade}$$

1. Schritt: Direkter Beweis

$$\begin{array}{llrcl} n \text{ gerade bedeutet:} & \exists k \in \mathbb{N} \text{ mit} & n & = & 2k \\ & \Rightarrow & n^2 & = & 4k^2 \\ & & & = & 2(2k^2) \\ & \Rightarrow & n^2 & \text{ist} & \text{gerade} \end{array}$$

2. Schritt: Indirekter Beweis (Zeige statt $A \Rightarrow B$ das gilt $\neg B \Rightarrow \neg A$)

$$\begin{array}{lll} \text{Annahme: } n \text{ ungerade} & \Rightarrow & \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k - 1 \\ & \Rightarrow & n^2 = (2k-1)^2 \\ & & = 4k^2 - 4k + 1 \\ & & = 2(2k^2 - 2k) + 1 \\ & \Rightarrow & n^2 \text{ ist ungerade} \end{array}$$

Satz:

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational, d.h. $\sqrt{2}$ lässt sich nicht als Bruch

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}$$

mit natürlichen Zahlen n und m darstellen.

Beweis: (durch Widerspruch)

Annahme: $\exists\, n \in \mathbb{N} : \exists\, m \in \mathbb{N} : \sqrt{2} = \dfrac{n}{m}$

Wir dürfen annehmen, dass n und m teilerfremd sind (ansonsten teilen wir durch den ggT).

$$2m^2 = n^2 \Rightarrow n^2 \text{ gerade} \Rightarrow n \text{ gerade} \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N} : n = 2k$$

Einsetzen in $2m^2 = n^2$ ergibt

$$2m^2 = n^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Rightarrow m^2 = 2k^2 \Rightarrow m^2 \text{ gerade} \Rightarrow m \text{ gerade}$$

Widerspruch zur Annahme, dass n und m teilerfremd sind.

Die Annahme $\sqrt{2} = \dfrac{n}{m}$ ist also **falsch** $\quad\Rightarrow\quad$ $\sqrt{2}$ ist irrational!

1.2 Mengen

Bezeichnungen:

$A, B, \ldots, M, N, \ldots$ Mengen

$a \in M :\Leftrightarrow a$ ist ein Element der Menge M

$a \notin M :\Leftrightarrow \neg(a \in M)$

Definition von Mengen:

a) Aufzählung der Elemente $M := \{1, 2, 3, 4\}$

b) Charakterisierende Eigenschaft der Menge,

$$M := \{x \in \Omega \mid A(x)\}$$

Bedeutung der verwendeten Symbole:

:= “wird definiert durch”

A(x) Aussageform, definiert für Elemente aus dem Grundbereich Ω

Teilmengen von Mengen:

$$M \subset N \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \,:\, (x \in M \Rightarrow x \in N)$$

Gleichheit von Mengen:

$$M = N \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \,:\, (x \in M \Leftrightarrow x \in N)$$

Leere Menge: Menge, die kein Element enthält (eindeutig)
Bezeichnung: $\emptyset$

Ordnungseigenschaft:

$$\begin{array}{ll} a) & M \subset M \\ b) & M \subset N \wedge N \subset M \quad \Rightarrow \quad M = N \\ c) & M \subset N \wedge N \subset P \quad \Rightarrow \quad M \subset P \end{array}$$

Verknüpfung von Mengen:

$$\begin{array}{lcll} M \cup N & := & \{x \,|\, x \in M \vee x \in N\} & \text{(Vereinigung)} \\ M \cap N & := & \{x \,|\, x \in M \wedge x \in N\} & \text{(Durchschnitt)} \\ M \setminus N & := & \{x \,|\, x \in M \wedge x \notin N\} & \text{(Differenz)} \\ M \times N & := & \{(a,b) \,|\, a \in M \wedge b \in N\} & \text{(Cartesisches Produkt)} \\ \mathcal{P}(M) & := & \{X \,|\, X \subset M\} & \text{(Potenzmenge)} \end{array}$$

Bemerkungen:

a) Gilt $M \cap N = \emptyset$, so nennt man M und N **disjunkt**.

b) Verknüpfung von endlich viele Mengen

$$\begin{aligned}
\bigcup_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \\
&:= \{a \,|\, \exists\, i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, a \in A_i\} \\
\bigcap_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \\
&:= \{a \,|\, \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, a \in A_i\} \\
\prod_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \\
&:= \{(a_1, \ldots, a_n) \,|\, \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, a_i \in A_i\}
\end{aligned}$$

Bemerkungen:

c) Für geordnete Paare bzw. n–Tupel gilt:

$$\begin{aligned}
(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \;&\Leftrightarrow\; a_1 = b_1 \,\wedge\, a_2 = b_2 \\
(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \;&\Leftrightarrow\; \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, x_i = y_i
\end{aligned}$$

d) Wichtige Cartesische Produkte:

die **Euklidische Ebene**

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

der **dreidimensionale Euklidische Raum**

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

der n**–dimensionale Euklidische Raum**

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{\text{n–fach}} = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{R}\}$$

Beispiele:

a) Kreisscheibe mit Radius 1

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}$$

b) Streifen

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 5 \leq x^2+1 \leq 17\}$$

c) Intervalle in $\mathbb{R}$: Sei $a \leq b$; $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{lcll} [a,b] & := & \{x \,|\, a \leq x \leq b\} & \text{abgeschlossenes Intervall} \\ (a,b) & := & \{x \,|\, a < x < b\} & \text{offenes Intervall} \\ [a,b) & := & \{x \,|\, a \leq x < b\} & \text{halboffenes Intervall} \\ (a,b] & := & \{x \,|\, a < x \leq b\} & \text{halboffenes Intervall} \end{array}$$

Beispiele:

d) Querschnitt eines T–Trägers

$$\begin{array}{rcl} M & := & M_1 \cup M_2 \\ M_1 & := & \left[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right] \times [-\gamma, 0] \\ M_2 & := & \left[-\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right), \left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\right] \times [0, \delta] \end{array}$$