Stoffplan für die Vorlesung
Mathematik für Studierende der Physik

1. Semester *)

I. **Vektoren** (8)

I.1 Zahlen ($\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$)

I.2 $\mathbb{R}^n$, Zahlen und skalare Multiplikation, Skalarprodukt.

I.3 Vektorräume.

II. **Lineare Gleichungen** (16)

II.1 Lineare Abbildungen und Matrizen auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$.

II.2 Matrixalgebra (Summen, Produkte, transponierte- und adjungierte Matrix, Inverse Matrix)

II.3 Determinanten (Definition, Eigenschaften; Entwicklungssatz; homogene Gleichungssysteme)

II.4 Eigenwert-Gleichungen (Charakteristisches Polynom, orthogonale und unitäre Matrizen; Diagonalisierbarkeit)

III. **Konvergenz** (12)

III.1 Vollständige Induktion

III.2 Ungleichungen

III.3 Folgen reeller Zahlen, Grenzwerte (Konvergenz, Limes, Eigenschaften von lim)

III.4 Cauchy–Kriterium (Formulierung; $\mathbb{R}$ als Vervollständigung von $\mathbb{Q}$, Konvergenz beschränkter, monotoner Folgen)

III.5 Reihen (Konvergenzkriterien, alternierende Reihen, absolute Konvergenz; Exponentialreihe)

1

[1] Die in Klammern stehenden Zahlen geben (in etwa) den Zeitbedarf in Vorlesungsstunden an. Sie können als Maß für das Gewicht der einzelnen Abschnitte benutzt werden.

IV **Stetigkeit und Differentiation im $\mathbb{R}^1$** (12)

IV.1 Funktionen (Graph einer Funktion; Summen, Produkt von Funktionen, Komposition)

IV.2 Stetigkeit (Grenzwerte bei Funktionen; Definition von Stetigkeit mittels Folgen)

IV.3 Umkehrfunktion (Beispiel: Logarithmus)

IV.4 Komplexwertige Funktionen (e^{ix} , Eulersche Formeln für $\sin, \cos$)

IV.5 Differentiation (Definition und geometrische Interpretation; Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel. Ableitung der Umkehrfunktion; Ableitung höherer Ordnung)

IV.6 Kurvendiskussion (Lokale Extrema, Regel von l'Hospital)

IV.7 Numerische Lösung von Gleichungen (Fixpunktsatz, Newtonsches Verfahren)

V **Riemannsches Integral** (12)

V.1 Riemann-integrierbare Funktionen (Treppenfunktionen, Riemannsche Summen, Ober- und Unterintegral)

V.2 Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung. (Unbestimmtes Integral, Fundamentalsatz; Substitutionsregeln; partielle Integration; Partialbruchzerlegung)

V.3 Uneigentliche Integrale (Definition; Beispiel: Γ-Funktion)

2. Semester

VI **Hilbertraum** (4)

VI.1 Prähilberträume (Skalarprodukt, Norm; Beispiele: stetige, quadratintegrable Funktionen, l^2)

VI.2 Orthonormalsysteme (Schmidt'sches Orthogonalisierungsverfahren; Beispiele: Legendre Polynome, e^{inx} auf $[0, 2\pi]$.)

VII **Funktionenfolgen** (16)

VII.1 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz (Stetigkeit der Grenzfunktion, Vertauschung von Differentiation und Integration mit Grenzprozessen; Taylor Reihen)

VII.2 Konvergenz im quadratischen Mittel (Fourier Reihen, Besselsche Ungleichung, Parsevalsche Gleichung)

VII.3 Distributionen (Konvergenz im Mittel, lineare Funktionale; Diracsche δ-Funktionen, Hauptwert)

VIII **Fourier–Transformation** (6)

VIII.1 Fourier-transformierte der beliebig oft differenzierbaren, rasch abfallenden Funktionen $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (Beispiel: e^{-x^2})

VIII.2 Der Satz von Fourier für $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

VIII.3 Fourier–transformierte von Distributionen (Beispiel: Diracsche δ-Funktion und deren Ableitung)

IX **Gewöhnliche Differentialgleichungen** (18)

IX.1 Beispiel für Differentialgleichungen erster Ordnung (Differentialgleichungen mit getrennten Variablen, lineare Differentialgleichungen, homogene Differentialgleichungen

IX.2 Differentialgleichungen 2-ter Ordnung (Newtonsche Bewegungsgleichung, erstes Integral; Umformung in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung)

IX.3 Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung (Lipschitz Bedingung, Existenz, Eindeutigkeit; Picard-Lindelöf Verfahren)

IX.4 Die inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (Greensche Funktionen, Lösung durch Fouriertransformation)

IX.5 Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten (Lösungsverfahren)

X **Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$** (16)

X.1 Topologie im $\mathbb{R}^n$ (Kugeln, Umgebungen, offene und abgeschlossene Mengen, Randpunkte)

X.2 Konvergenz und Stetigkeit (Konvergenz einer Punktfolge, Cauchy-Folgen, stetige Funktionen; Satz von Bolzano-Weierstraß)

X.3 Partielle Differenzierbarkeit (Graph einer Funktion, Niveau-Mengen, Richtungsableitungen, partielle Ableitungen; partielle Ableitungen höherer Ordnung)

X.4 Totale Differenzierbarkeit (Lineare Approximation, Funktional-Matrix, Kettenregel)

X.5 Vektoranalysis (Vektorfelder; Gradient, Divergenz, Rotation)

X.6 Lokale Extrema (Hessesche Matrix)

X.7 Implizite Funktionen (Satz über implizite Funktionen;
inverse differenzierbare Abbildungen; Extremwerte mit Nebenbedingungen,
Lagrangesche Multiplikatoren)

X.8 Parameterabhängige Integrale (Gleichmäßige Stetigkeit
und Konvergenz, Vertauschung von Grenzprozessen)

3. Semester

XI **Integration im $\mathbb{R}^n$** (15)

XI.1 Das Integral für stetige Funktionen mit kompaktem Träger
(Linearität, Monotonie, Invarianz)

XI.2 Riemann integrierbare Funktionen (Integrierbarkeit, Meßbarkeit
von Mengen, elementare Eigenschaften des Integrals; Satz von Fubini
Cavallierisches Prinzip; Definition des Integrals mit Hilfe von Treppenfunktionen)

XI.3 Mehrfache Integrale (Transformationsformel, Jacobi Determinante)

XI.4 Uneigentliche Integrale

XII **Die klassischen Integralsätze im $\mathbb{R}^3$** (25)

XII.1 Kurven und Flächen im $\mathbb{R}^3$

XII.2 Integration auf Untermannigfaltigkeiten

XII.3 Die Sätze von Gauß, Green und Stokes

XII.4 Poincarés Lemma

XII.5 1-Formen auf Flächen im $\mathbb{R}^3$ (Darstellung in lokalen Koordinaten
Koordiantenwechsel; geschlossene Formen; integrierende Nenner)

XIII **Partielle Differentialgleichungen** (20)

XIII.1 Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung; Charakteristiken

XIII.2 Typeneinteilung und Fragestellungen (hyperbolisch, elliptisch, parabolisch;
Anfangs-Randwertprobleme; Existenz, Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit
von den Anfangsbedingungen)

XIII.3 Wellengleichung (Lösung des Anfangswertproblems; Abhängigkeits-,
Bestimmtheitsgebiete, charakteristische Mannigfaltigkeiten.
Beispiele für Anfangs-Randwertprobleme)

XIII.4 Potentialgleichung (Randwertproblem, Singularitätenfunktionen, Greensche Funktionen; Mittelwert- und Minimax-Eigenschaften)

XIII.5 Wärmeleitungsgleichung (Anfangs-Randwertproblem, Minimax-Prinzip, Singularitäten für $t < 0$)

4. Semester

XIV **Elemente der Funktionentheorie** (35)

XIV.1 Differenzierbarkeit auf $\mathbb{C}$

XIV.2 Cauchyscher Integralsatz und Integralformel

XIV.3 Potenzreihenentwicklung

XIV.4 Meromorphe Funktion, Laurententwicklung

XIV.5 Residuensatz

XIV.6 Analytische Fortsetzung

XIV.7 Konforme Abbildung

XV **Lineare Operatoren auf Hilberträumen** (25)

XV.1 Hilberträume (Wiederholung)

XV.2 Vollständigkeit (Starke Topologie, Cauchy-Folgen; Vervollständigung, Beispiel: $L^2(\mathbb{R}^n)$ als Vervollständigung des Raumes der stetigen, quadratintegrablen Funktionen; dichte Unterräume; Satz von Riesz)

XV.3 Stetige lineare Operatoren (Definition, symmetrische Operatoren, adjungierter Operator; orthogonale Projektoren, unitäre Operatoren, isometrische Operatoren)

XV.4 Fouriertransformation (als Beispiel eines unitären Operators auf $L^2(\mathbb{R}^n)$)

XV.5 Spektrum (Diskretes und kontinuierliches Spektrum, Spektrum von symmetrischen Operatoren; Projektoren, unitären Operatoren; Ausblick auf das Spektraltheorem)

XV.6 Unbeschränkte lineare Operatoren (Definitionsbereich, symmetrische und selbstadjungierte Operatoren; Beispiel: Differentialoperatoren $i\frac{d}{dx}$ auf $L^2([-a,a])$, $L^2([0,\infty])$, $L^2(\mathbb{R})$; Spektrum)