O Oberstufe

Aufgabe 1 (5 P.)**.** Jeder der 2018 Bewohner einer Insel ist entweder Ritter, Lügner oder Konformist (Angepasster). Jeder weiß über jeden, was derjenige ist. An einem Tag werden alle Bewohner in einer Reihe aufgestellt und ihnen wird nacheinander dieselbe Ja-Nein-Frage gestellt: „Gibt es mehr Ritter als Lügner auf der Insel?“ Jeder kann alle vorherigen Antworten hören. Ein Ritter sagt immer die Wahrheit, ein Lügner lügt immer und ein Konformist antwortet immer so wie die Mehrheit der Leute vor ihm geantwortet haben. Falls darunter gleich viele „Ja“ und „Nein“ waren, wählt er zufällig eine Antwort. Am Ende haben genau 1009 Bewohner mit „Ja“ geantwortet. Wie viele Konformisten können sich maximal unter den Bewohnern der Insel befinden?

Aufgabe 2 (7 P.)**.** In einem spitzwinkligen, aber nicht gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ sei O der Umkreismittelpunkt und AH_a und BH_b Höhen. Die Punkte X und Y seien die Punktspiegelungen von H_a und H_b an den Mittelpunkten der Seiten BC bzw. CA. Beweise, dass CO die Strecke XY in der Mitte schneidet.

Aufgabe 3. Beweise, dass man jede ganze Zahl schreiben kann als Summe

(a) (6 P.) eines Quadrats und zweier Kuben (dritter Potenzen) von ganzen Zahlen, wenn die Zahl von der Form $3k - 2$ (mit k ganz) ist, bzw.

(b) (2 P.) eines Quadrats und dreier Kuben von ganzen Zahlen (hier unabhängig von der Form).

Aufgabe 4 (8 P.)**.** Endlich viele Zellen eines (in alle Richtungen) unendlichen Gitters seien schwarz gefärbt, alle übrigen weiß. Betrachte ein Polygon aus Papier, das auf der Ebene liegt, seine Seiten entlang von Gitterlinien hat und mindestens zwei Zellen bedeckt. Dieses Polygon darf beliebig verschoben werden (jedoch nicht gedreht), so dass seine Seiten wieder auf Gitterlinien liegen. Wenn nach einer Verschiebung genau eine der dann bedeckten Zellen weiß ist, wird sie schwarz gefärbt. Beweise, dass es immer eine weiße Zelle gibt, die nie schwarz gefärbt wird, unabhängig von der Anzahl an Verschiebungen.

Aufgabe 5 (8 P.)**.** Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks zerteilen dessen Winkel in sechs Winkel. Was ist die größtmögliche Anzahl k an Winkeln größer $30°$ unter diesen sechs Winkeln?

Aufgabe 6 (9 P.)**.** Auf der reellen Achse seien unendlich viele positive ganze Zahlen markiert. Wenn ein Rad entlang der Achse rollt, hinterlässt jede markierte Zahl auf dem Rad eine punktförmige Spur. Beweise, dass man R so wählen kann, dass ein Rad vom Radius R, das bei 0 startet und entlang der Achse rollt, auf jedem Abschnitt von $1°$ mindestens eine Spur einer markierten Zahl erhält.

Aufgabe 7. Rockefeller und Marx spielen folgendes Spiel. Es gibt $n > 1$ Städte jeweils mit derselben Einwohnerzahl. Am Anfang des Spiels hat jeder Einwohner genau eine Münze (die alle gleich sind). In seinem Zug wählt Rockefeller je einen Einwohner in jeder Stadt aus und Marx verteilt deren Münzen so unter ihnen um, dass sich die Verteilung von der vorherigen bei mindestens einem Einwohner unterscheidet. Rockefeller gewinnt, wenn zu einem Zeitpunkt in jeder Stadt mindestens ein Einwohner keine Münzen hat. Beweise, dass Rockefeller immer gewinnen kann, unabhängig von der Spielweise von Marx, wenn jede Stadt

(a) (10 P.) $2n$ Einwohner hat bzw.

(b) (4 P.) $2n - 1$ Einwohner hat.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden. Viel Erfolg!