M Mittelstufe

Aufgabe 1 (5 P.)**.** Im Dreieck $\triangle ABC$ sei M der Mittelpunkt der Seite BC. Der Punkt E liege so auf der Strecke AC, dass $BE \geq 2AM$ gilt (wobei E nicht mit A oder C zusammenfällt). Beweise, dass $\triangle ABC$ stumpfwinklig ist.

Aufgabe 2 (6 P.)**.** Jeder der 2018 Bewohner einer Insel ist entweder Ritter, Lügner oder Konformist (Angepasster). Jeder weiß über jeden, was derjenige ist. An einem Tag werden alle Bewohner in einer Reihe aufgestellt und ihnen wird nacheinander dieselbe Ja-Nein-Frage gestellt: „Gibt es mehr Ritter als Lügner auf der Insel?“ Jeder kann alle vorherigen Antworten hören. Ein Ritter sagt immer die Wahrheit, ein Lügner lügt immer und ein Konformist antwortet immer so wie die Mehrheit der Leute vor ihm geantwortet haben. Falls darunter gleich viele „Ja“ und „Nein“ waren, wählt er zufällig eine Antwort. Am Ende haben genau 1009 Bewohner mit „Ja“ geantwortet. Wie viele Konformisten können sich maximal unter den Bewohnern der Insel befinden?

Aufgabe 3 (8 P.)**.** Man soll eine Zahl der Form $77\ldots7$ nur unter Benutzung der Ziffer 7 aufschreiben. Dabei darf man addieren, subtrahieren, multiplizieren, dividieren, potenzieren, Klammern benutzen und jeweils beliebig viele Ziffern 7 hintereinander schreiben. Gibt es eine Zahl in der Form $77\ldots7$, die auf diese Weise mit weniger Ziffern 7 geschrieben werden kann als sie in ihrer Dezimaldarstellung geschrieben wird? Zum Beispiel ist die kürzeste Möglichkeit die Zahl 77 zu schreiben einfach 77.

Aufgabe 4 (8 P.)**.** Ein (7×7)-Spielfeld kann entweder leer sein oder ein unsichtbares (2×2)-Schiff (entlang der Gitterlinien) enthalten. Ein Detektor, der auf einer Zelle steht, zeigt an, ob die Zelle von dem Schiff besetzt ist. Alle Detektoren werden gleichzeitig angeschaltet. Was ist die kleinste Anzahl an Detektoren, die man benötigt, um in jedem Fall festzustellen, ob ein Schiff auf dem Spielfeld ist und – wenn ja – wo es sich befindet?

Aufgabe 5 (8 P.)**.** Ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ (mit $AD \parallel BC$ und $AB \nparallel CD$) sei in einen Kreis mit Mittelpunkt O einbeschrieben. Die Gerade BO schneide die Strecke AD im Punkt E. Es seien O_1 und O_2 jeweils Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks $\triangle ABE$ bzw. $\triangle BDE$. Beweise, dass O_1, O_2, O und C konzyklisch sind, d. h. auf einem Kreis liegen.

Aufgabe 6. Beweise, dass man jede ganze Zahl schreiben kann als Summe

(a) (7 P.) eines Quadrats und zweier Kuben (dritter Potenzen) von ganzen Zahlen, wenn die Zahl von der Form $3k - 2$ (mit k ganz) ist, bzw.

(b) (3 P.) eines Quadrats und dreier Kuben von ganzen Zahlen (hier unabhängig von der Form).

Aufgabe 7. In einer virtuellen Welt gibt es $n \geq 2$ Städte. Zwischen einigen Paaren von Städten verlaufe je eine Straße (aber nie mehr als eine). Jede Stadt kann von jeder anderen über Straßen erreicht werden. Nur in Städten kann man von einer Straße auf eine andere wechseln. Die Welt wird *einfach* genannt, wenn es unmöglich ist, von einer Stadt in dieselbe zu fahren, ohne dabei eine Straße doppelt zu benutzen. Anderenfalls wird die Welt *kompliziert* genannt.

Peter und Basil spielen das folgende Spiel. Am Anfang wählt Peter für jede Straße eine Richtung aus, in der diese nur benutzt werden darf, und er setzt einen Touristen in eine der Städte. In jedem Zug bewegt Peter den Touristen entlang einer Straße in erlaubter Richtung. Danach ändert Basil in seinem Zug immer die erlaubte Richtung einer der an die Stadt grenzenden Straßen, in der sich der Tourist gerade aufhält. Basil gewinnt, wenn Peter nicht ziehen kann. Beweise:

(a) (5 P.) Peter muss in einer einfacher Welt nie verlieren, unabhängig von Basils Spielweise.

(b) (7 P.) Basil kann in einer komplizierten Welt stets siegen, unabhängig von Peters Spielweise.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden. Viel Erfolg!

O Oberstufe

Aufgabe 1 (5 P.)**.** Jeder der 2018 Bewohner einer Insel ist entweder Ritter, Lügner oder Konformist (Angepasster). Jeder weiß über jeden, was derjenige ist. An einem Tag werden alle Bewohner in einer Reihe aufgestellt und ihnen wird nacheinander dieselbe Ja-Nein-Frage gestellt: „Gibt es mehr Ritter als Lügner auf der Insel?“ Jeder kann alle vorherigen Antworten hören. Ein Ritter sagt immer die Wahrheit, ein Lügner lügt immer und ein Konformist antwortet immer so wie die Mehrheit der Leute vor ihm geantwortet haben. Falls darunter gleich viele „Ja“ und „Nein“ waren, wählt er zufällig eine Antwort. Am Ende haben genau 1009 Bewohner mit „Ja“ geantwortet. Wie viele Konformisten können sich maximal unter den Bewohnern der Insel befinden?

Aufgabe 2 (7 P.)**.** In einem spitzwinkligen, aber nicht gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ sei O der Umkreismittelpunkt und AH_a und BH_b Höhen. Die Punkte X und Y seien die Punktspiegelungen von H_a und H_b an den Mittelpunkten der Seiten BC bzw. CA. Beweise, dass CO die Strecke XY in der Mitte schneidet.

Aufgabe 3. Beweise, dass man jede ganze Zahl schreiben kann als Summe

(a) (6 P.) eines Quadrats und zweier Kuben (dritter Potenzen) von ganzen Zahlen, wenn die Zahl von der Form $3k - 2$ (mit k ganz) ist, bzw.

(b) (2 P.) eines Quadrats und dreier Kuben von ganzen Zahlen (hier unabhängig von der Form).

Aufgabe 4 (8 P.)**.** Endlich viele Zellen eines (in alle Richtungen) unendlichen Gitters seien schwarz gefärbt, alle übrigen weiß. Betrachte ein Polygon aus Papier, das auf der Ebene liegt, seine Seiten entlang von Gitterlinien hat und mindestens zwei Zellen bedeckt. Dieses Polygon darf beliebig verschoben werden (jedoch nicht gedreht), so dass seine Seiten wieder auf Gitterlinien liegen. Wenn nach einer Verschiebung genau eine der dann bedeckten Zellen weiß ist, wird sie schwarz gefärbt. Beweise, dass es immer eine weiße Zelle gibt, die nie schwarz gefärbt wird, unabhängig von der Anzahl an Verschiebungen.

Aufgabe 5 (8 P.)**.** Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks zerteilen dessen Winkel in sechs Winkel. Was ist die größtmögliche Anzahl k an Winkeln größer $30°$ unter diesen sechs Winkeln?

Aufgabe 6 (9 P.)**.** Auf der reellen Achse seien unendlich viele positive ganze Zahlen markiert. Wenn ein Rad entlang der Achse rollt, hinterlässt jede markierte Zahl auf dem Rad eine punktförmige Spur. Beweise, dass man R so wählen kann, dass ein Rad vom Radius R, das bei 0 startet und entlang der Achse rollt, auf jedem Abschnitt von $1°$ mindestens eine Spur einer markierten Zahl erhält.

Aufgabe 7. Rockefeller und Marx spielen folgendes Spiel. Es gibt $n > 1$ Städte jeweils mit derselben Einwohnerzahl. Am Anfang des Spiels hat jeder Einwohner genau eine Münze (die alle gleich sind). In seinem Zug wählt Rockefeller je einen Einwohner in jeder Stadt aus und Marx verteilt deren Münzen so unter ihnen um, dass sich die Verteilung von der vorherigen bei mindestens einem Einwohner unterscheidet. Rockefeller gewinnt, wenn zu einem Zeitpunkt in jeder Stadt mindestens ein Einwohner keine Münzen hat. Beweise, dass Rockefeller immer gewinnen kann, unabhängig von der Spielweise von Marx, wenn jede Stadt

(a) (10 P.) $2n$ Einwohner hat bzw.

(b) (4 P.) $2n - 1$ Einwohner hat.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden. Viel Erfolg!