

O Oberstufe

Aufgabe 1 (3 P.). Die Winkelhalbierende und die Höhe werden von einem Eckpunkt eines Dreiecks gezeichnet und teilen die gegenüberliegende Seite in drei Strecken. Gibt es Dreiecke, bei denen es möglich ist, aus diesen drei Strecken ein neues Dreieck zu bilden?

Aufgabe 2 (4 P.). Vier natürliche Zahlen sind so beschaffen, dass jede von ihnen durch den größten gemeinsamen Teiler der anderen drei teilbar ist und dass das kleinste gemeinsame Vielfache von je dreien durch die vierte Zahl teilbar ist. Beweise, dass das Produkt dieser vier Zahlen eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 3 (4 P.). Zwei Kreise mit Mittelpunkten O_1 und O_2 berühren sich jeweils außen im Punkt T . Eine gemeinsame Tangente wird gezeichnet, die den ersten Kreis im Punkt A und den zweiten im Punkt B berührt. Die gemeinsame Tangente durch den Punkt T schneidet die Gerade AB im Punkt M . AC sei ein Durchmesser des ersten Kreises. Beweise, dass die Strecken CM und AO_2 senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe 4 (5 P.). In der Ecke eines 8×8 -Schachbretts liegt ein Chip. Peter und Basil bewegen den Chip abwechselnd. Peter fängt an und bewegt den Chip jeweils wie eine Dame beim Schach (beliebig weit entweder senkrecht, waagrecht oder diagonal), nur das Zielfeld wird bei so einem Zug als *betreten* gewertet. Basil bewegt den Chip jeweils zweimal wie ein König (ein Feld weit entweder senkrecht, waagrecht oder diagonal), beide Felder werden hierbei als *betreten* gewertet. Das ursprüngliche Feld gilt bereits als *betreten*. Der Chip darf auf kein Feld gesetzt werden, das schon *betreten* worden ist. Der Spieler, der nicht mehr ziehen kann, verliert. Welcher der beiden Jungen kann so spielen, dass er immer gewinnt, unabhängig davon, wie sein Gegner spielt?

Aufgabe 5 (5 P.). An jeder Ecke eines Polyeders berühren sich genau drei Flächen. Jede Fläche dieses Polyeders ist rot, gelb oder blau gefärbt. Die Ecken, an denen sich Flächen aller Farben berühren, werden *vielfarbig* genannt. Beweise, dass die Anzahl der vielfarbigen Ecken gerade ist.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden.

Viel Erfolg!