39. Internationaler Städtewettbewerb Mathematik — 7. November 2017
Herbstrunde — Hamburg

M Mittelstufe

Aufgabe 1 (4 P.)**.** Man hat ein Metallgewicht von 6 kg zur Verfügung, Zucker und Beutel für Zucker (so viel man benötigt). Darüber hinaus hat man eine Balkenwaage mit zwei Waagschalen, die dann im Gleichgewicht sind, wenn das Verhältnis der Gewichte der rechten und linken Waagschale $3:4$ beträgt. Bei einer Wägung kann man bereits vorhandene Gewichte auf die Waage legen und zusätzlich einen Beutel mit Zucker, so dass die Waage im Gleichgewicht ist. Diesen Beutel kann man dann in weiteren Wägungen auch als Gewicht nutzen. Ist es möglich, einen Beutel mit genau 1 kg Zucker zu erzeugen?

Aufgabe 2 (4 P.)**.** Gegeben seien zwei Münzen mit Radius 1 cm, zwei Münzen mit Radius 2 cm und zwei Münzen mit Radius 3 cm. Man darf zwei Münzen auf den Tisch legen, so dass sie sich (tangential) berühren, und dann weitere Münzen hinzufügen – jeweils eine zurzeit –, so dass die neue Münze an mindestens zwei tangential anliegt. Die Münzen dürfen dabei nicht aufeinander liegen. Ist es möglich, auf diese Weise einige Münzen so zu platzieren, dass drei ihrer Mittelpunkte auf einer Geraden liegen?

Aufgabe 3 (6 P.)**.** Ein Analyst macht für jeden der nächsten drei Monate eine Vorhersage, wie sich das Verhältnis Dollar/Euro verändert: also um welche Prozentzahl (höher als 0% und niedriger als 100%) sich das Verhältnis ändert im Juli, im August und im September. Es stellt sich heraus, dass er zwar für jeden Monat die richtige Prozentzahl vorhergesehen hat, aber sich geirrt hat, ob das Verhältnis steigt oder fällt (also, immer wenn er vorhergesagt hat, dass das Verhältnis um $x\%$ fällt, ist das wirkliche Verhältnis um $x\%$ gestiegen, und anders herum ebenfalls). Trotzdem stimmt das Dollar/Euro-Verhältnis nach drei Monaten mit der Vorhersage überein. Ist das Dollar/Euro-Verhältnis insgesamt gestiegen oder gefallen?

Aufgabe 4. Es gibt 100 Türen, jede mit ihrem eigenen Schlüssel (der nur diese Tür öffnet). Die Türen sind mit 1 bis 100 nummeriert und die Schlüssel ebenfalls. Es ist bekannt, dass die Nummer jedes Schlüssels entweder gleich der Nummer der Tür ist, die er öffnet, oder um genau 1 von dieser abweicht. In einem Versuch kann man sich jeweils (genau) eine beliebige Tür und (genau) einen beliebigen Schlüssel auswählen und ausprobieren, ob der gewählte Schlüssel die gewählte Tür öffnet. Ist es immer möglich für alle Schlüssel herauszufinden, welcher welche Tür öffnet (a) (1 P.) in 99 Versuchen, (b) (3 P.) in 75 Versuchen bzw. (c) (4 P.) in 74 Versuchen?

Aufgabe 5 (9 P.)**.** Die Ziffern (der Dezimaldarstellung) einer natürlichen Zahl $n > 1$ seien in umgekehrter Reihenfolge aufgeschrieben und die sich dabei ergebende Zahl werde mit n multipliziert. Ist es möglich, dass man eine Zahl erhält, deren Ziffern alle 1 sind?

Aufgabe 6 (9 P.)**.** Der Inkreis des Dreiecks $\triangle ABC$ berühre die Seiten AB, BC und AC in den Punkten N, K bzw. M. Die Geraden MN und MK schneiden die äußere Winkelhalbierende (also die Senkrechte zur Winkelhalbierenden im Scheitelpunkt) des Winkels $\angle ABC$ in den Punkten R bzw. S. Beweise, dass sich die Geraden RK und SN auf dem Inkreis von $\triangle ABC$ schneiden.

Aufgabe 7. Eine Stadt ist ein Rechteck, das in quadratische Blöcke mit jeweils einem Gebäude pro Block aufgeteilt ist. Jedes Gebäude hat fünf Stockwerke. Das Renovierungsgesetz erlaubt einem, zwei Blöcke zu wählen, die eine gemeinsamen Seite haben und zu dem Zeitpunkt beide Häuser beinhalten, und das mit weniger Stockwerken abzureißen (oder eins von zweien mit derselben Anzahl Stockwerke). Nach dem Abriss wird dieselbe Anzahl an Stockwerken, die das abgerissene Gebäude hatte, auf das andere Gebäude aufgesetzt. Was ist die kleinste Anzahl an Gebäuden, die nach dem Renovierungsgesetz in der Stadt übrig bleiben können, wenn die Stadt

(a) (5 P.) aus 20×20 Blöcken besteht bzw.

(b) (5 P.) aus 50×90 Blöcken besteht?

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden. — Viel Erfolg!

O Oberstufe

Aufgabe 1. Es gibt 100 Türen, jede mit ihrem eigenen Schlüssel (der nur diese Tür öffnet). Die Türen sind mit 1 bis 100 nummeriert und die Schlüssel ebenfalls. Es ist bekannt, dass die Nummer jedes Schlüssels entweder gleich der Nummer der Tür ist, die er öffnet, oder um genau 1 von dieser abweicht. In einem Versuch kann man sich jeweils (genau) eine beliebige Tür und (genau) einen beliebigen Schlüssel auswählen und ausprobieren, ob der gewählte Schlüssel die gewählte Tür öffnet. Ist es immer möglich für alle Schlüssel herauszufinden, welcher welche Tür öffnet (a) (1 P.) in 99 Versuchen, (b) (2 P.) in 75 Versuchen bzw. (c) (3 P.) in 74 Versuchen?

Aufgabe 2 (5 P.)**.** Sechs Kreise vom Radius 1 haben die Mittelpunkte auf den Eckpunkten eines regelmäßigen Sechsecks, so dass das Zentrum O des Sechsecks innerhalb aller sechs Kreise liegt. Ein Winkel an O mit Winkelmaß α schneidet sechs Bögen aus den Kreisen aus (aus jedem einen). Beweise, dass die Summe der Winkel der Bögen (vom jeweiligen Kreismittelpunkt aus gemessen) 6α beträgt.

Aufgabe 3 (6 P.)**.** Ein Analyst macht für jeden der nächsten zwölf Monate eine Vorhersage, wie sich das Verhältnis Dollar/Euro verändert: also um welche Prozentzahl (höher als 0% und niedriger als 100%) sich das Verhältnis ändert im Oktober, im November, im Dezember und so weiter. Es stellt sich heraus, dass er zwar für jeden Monat die richtige Prozentzahl vorhergesehen hat, aber sich geirrt hat, ob das Verhältnis steigt oder fällt (also, immer wenn er vorhergesagt hat, dass das Verhältnis um x% fällt, ist das wirkliche Verhältnis um x% gestiegen, und anders herum ebenfalls). Trotzdem stimmt das Dollar/Euro-Verhältnis nach zwölf Monaten mit der Vorhersage überein. Ist das Dollar/Euro-Verhältnis insgesamt gestiegen oder gefallen?

Aufgabe 4 (8 P.)**.** Beweise, dass man für jede unendliche Folge $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ von 1en und -1en n und k so wählen kann, dass $|a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_k + a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{k+1} + \ldots + a_n \cdot a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{n+k}| = 2017$.

Aufgabe 5. Man soll ein Stück Käse in Teile zerschneiden und dabei die folgenden Regeln befolgen: 1. Der erste Schnitt muss den Käse in zwei Teile zerschneiden und jeder weitere Schnitt eins der vorliegenden Stücke in zwei. 2. Nach jedem Schnitt muss das Verhältnis des Gewichts jedes Stücks zum Gewicht jedes anderen Stücks größer als eine vorgegebene Zahl R sein.

(a) (3 P.) Beweise, dass man den Käse für $R = 0{,}5$ so zerschneiden kann, dass der Prozess niemals endet (also kann man nach jeder beliebigen Anzahl an Schnitten immer noch einen weiteren machen).

(b) (4 P.) Beweise, dass man für jedes $R > 0{,}5$ immer irgendwann aufhören muss zu schneiden.

(c) (4 P.) Welches ist die größte Anzahl an Stücken, die man für $R = 0{,}6$ erreichen kann?

Aufgabe 6 (10 P.)**.** Ein Dreieck $\triangle ABC$ sei gegeben. Sei I der Mittelpunkt des äußeren Ankreises an der Strecke AB und seien A_1 und B_1 die Punkte, an denen die jeweiligen Ankreise die Strecken BC bzw. AC berühren. Sei M der Mittelpunkt der Strecke IC und N der Schnittpunkt der Geraden AA_1 und BB_1. Beweise, dass die Punkte N, B_1, A und M auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

Aufgabe 7 (10 P.)**.** Eine Stadt hat die Form eines $n \times n$-Quadrates, das in 1×1-Blöcke aufgeteilt ist. Die Straßen verlaufen von Norden nach Süden und von Westen nach Osten. Ein Mann spaziert jeden Tag von der süd-westlichen Ecke zur nord-östlichen, wobei er sich nur nach Norden oder Osten bewegt, und kehrt dann zurück, wobei er sich nur noch Süden oder Westen bewegt. Jeden Tag wählt er seinen Weg (bestehend aus Hin- und Rückweg) so, dass die Gesamtlänge an Teilen, die er schon einmal gelaufen ist, möglichst klein ist. Beweise, dass er nach n Tagen alle Straßenabschnitte abgelaufen ist.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden. Viel Erfolg!