M Mittelstufe

Aufgabe 1 (3 P.)**.** Finde die kleinste natürliche Zahl, die durch 2017 teilbar ist und deren Dezimaldarstellung mit 2016 beginnt.

Aufgabe 2 (4 P.)**.** Beweise, dass es auf dem Graphen jedes quadratischen Polynoms mit genau einer Nullstelle, das 1 als ersten Koeffizienten hat, einen Punkt (p, q) gibt, so dass das Polynom $x^2 + px + q$ genau eine Nullstelle hat.

Aufgabe 3 (5 P.)**.** Für ein spitzwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ sei bei A der Winkel $\alpha = 60°$. Eine Billardkugel verlässt Punkt A entlang der Winkelhalbierenden von α, wird an BC reflektiert (nach dem Gesetz „Einfallswinkel ist gleich Ausfallswinkel“) und bewegt sich weiter entlang einer Geraden ohne weitere Reflexionen. Beweise, dass der Weg der Kugel durch den Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ verläuft.

Aufgabe 4 (5 P.)**.** Einhundert Kinder mit (paarweise) verschiedenen Größen stehen in einer Reihe. In jedem Schritt wird eine Gruppe von 50 aufeinanderfolgenden Kindern ausgewählt und beliebig umsortiert. Zeige, dass man die Kinder mit 6 solchen Schritten so sortieren kann, dass deren Größen von links nach rechts abnehmen (unabhängig von der ursprünglichen Aufstellung).

Aufgabe 5. (a) (2 P.) Betrachte ein Zehneck (nicht unbedingt ein konvexes) und zeichne alle Kreise, deren Durchmesser die Seiten des Zehnecks sind. Ist es möglich, dass alle diese Kreise durch einen gemeinsamen Punkt gehen, der keine Ecke des Zehnecks ist?

(b) (3 P.) Löse dasselbe Problem für ein Elfeck anstelle des Zehnecks.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden. Viel Erfolg!

O Oberstufe

Aufgabe 1 (3 P.). Betrachte ein regelmäßiges Zwölfeck $A_1A_2\dots A_{12}$. Ist es möglich, 7 der Vektoren $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\dots$, $\overrightarrow{A_{11}A_{12}}$, $\overrightarrow{A_{12}A_1}$ auszuwählen, so dass deren Summe der Nullvektor ist?

Aufgabe 2 (4 P.). Gegeben seien zwei konzentrische Kreise und ein Punkt A innerhalb des inneren Kreises. Ein Winkel der Größe α am Punkt A schneidet jeweils einen Kreisbogen von jedem der Kreise aus. Beweise: Wenn der Kreisbogen des äußeren Kreises die Größe α hat (also den Winkel α vom Kreismittelpunkt aus), so hat auch der des inneren Kreises die Größe α.

Aufgabe 3 (5 P.). Jede Zelle einer quadratischen 1000×1000-Tabelle enthält eine (reelle) Zahl. Es ist bekannt, dass die Summe der Zahlen jedes Rechtecks der Fläche S mit Seiten entlang der Zellwänden gleich ist. Finde alle Werte S, so dass damit garantiert ist, dass alle Zahlen der Tabelle gleich sind.

Aufgabe 4 (5 P.). Zehn Kinder mit (paarweise) verschiedenen Größen stehen im Kreis. In jedem Zug bewegt sich ein Kind auf einen neuen Platz im Kreis zwischen zwei Kinder. Die Kinder wollen so schnell wie möglich so aufgestellt sein, dass ihre Größe im Uhrzeigersinn vom kleinsten zum größten Kind ansteigt. Was ist die kleinste Anzahl an Zügen, mit der die Kinder dies erreichen können, unabhängig von ihrer ursprünglichen Aufstellung?

Aufgabe 5 (6 P.). Die Graphen zweier quadratischer Polynome schneiden sich in zwei Punkten. In diesen beiden Punkten sind die Tangenten an den Graphen senkrecht zueinander. Ist es dafür in jedem Fall notwendig, dass die Graphen eine gemeinsame Symmetrieachse haben?

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden. Viel Erfolg!