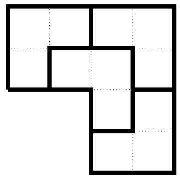
M Mittelstufe



Aufgabe 1. Ein Gitterpolygon ist ein Vieleck, dessen Seiten entlang der Linien eines quadratischen Gitters verlaufen. Ein Gitterpolygon heißt *fantastisch*, falls es kein Rechteck ist und sich mehrere seiner Kopien zu einem ähnlichen Gitterpolygon zusammensetzen lassen. Zum Beispiel ist eine Ecke bestehend aus drei Zellen ein fantastisches Polygon (siehe Abbildung rechts).

(a) (2 P.) Finde ein fantastisches Polygon, das aus genau 4 Zellen besteht.

(b) (3 P.) Ermittle alle $n > 4$, für die ein fantastisches Polygon existiert, das aus genau n Zellen besteht.

Aufgabe 2. Eine Menge bestehe aus allen ganzen Zahlen von 1 bis 100 mit Ausnahme von k dieser Zahlen. Ist es stets möglich, k verschiedene Zahlen dieser Menge auszuwählen, so dass deren Summe 100 beträgt, wenn

(a) (2 P.) $k = 9$ bzw.

(b) (4 P.) $k = 8$ ist?

Aufgabe 3. Beweise, dass in einem beliebigen Dreieck die Summe der Längen zweier Seitenhalbierenden stets

(a) (3 P.) nicht größer ist als $\frac{3}{4} \cdot U$ mit dem Umfang U des Dreiecks.

(b) (5 P.) nicht kleiner ist als $\frac{3}{4} \cdot u$ mit dem halben Umfang u des Dreiecks.

Aufgabe 4 (8 P.)**.** Aus Streichhölzern wird ein quadratisches 9×9-Gitter gelegt: Jede Seite einer Zelle besteht aus einem Streichholz und zwei benachbarte Zellen teilen sich genau ein Streichholz. Pete und Basil ziehen abwechselnd, indem sie jeweils ein Streichholz entfernen. Ein Spieler gewinnt, wenn nach dessen Zug kein vollständiges 1×1-Quadrat mehr übrig ist. Welcher Spieler hat eine Gewinnstrategie?

Aufgabe 5 (8 P.)**.** In einem Dreieck $\triangle ABC$ schneiden sich die Seitenhalbierenden AA_0, BB_0 und CC_0 im Punkt M. P, Q, R und T seien die Umkreismittelpunkte der Dreiecke $\triangle MA_0B_0$, $\triangle MCB_0$, $\triangle MC_0A_0$ bzw. $\triangle MC_0B$. Beweise, dass sich P, Q, R, T und M auf einem gemeinsamen Kreis befinden.

Aufgabe 6. Einige verschiedene reelle Zahlen stehen auf einer Tafel. Peter möchte einen Term (einen Ausdruck) hinschreiben, dessen Ergebnisse genau diese Zahlen sind. Um den Term zu schreiben, darf er verwenden: beliebige reelle Zahlen, Klammern und die üblichen Rechenzeichen $+$, $-$ und $\cdot$ (Multiplikationspunkt). Außerdem darf er das spezielle Zeichen $\pm$ nutzen: Der Term wird mit $+$ und $-$ für jedes $\pm$ in jeder Kombination einmal ausgewertet. Der Term 5 ± 1 erzeugt zum Beispiel $\{4, 6\}$ und $(2 \pm 0.5) \pm 0.5$ erzeugt $\{1, 2, 3\}$. Kann Peter einen Term finden

(a) (3 P.) für genau die Zahlen 1, 2 und 4 an der Tafel bzw.

(b) (7 P.) für jede Auswahl von 100 verschiedenen reellen Zahlen an einer Tafel?

Aufgabe 7 (10 P.)**.** Der Weihnachtsmann hat n Sorten Bonbons und k Bonbons von jeder Sorte. Er verteilt sie zufällig auf k Geschenkbeutel mit jeweils n Bonbons und gibt die Beutel an k Kinder. Die Kinder kucken sich den Inhalt ihrer Beutel an und beginnen zu tauschen: Zwei Kinder können jeweils einen Bonbon tauschen, wenn jedes dadurch einen Bonbon erhält, den es noch nicht hat. Kann die Reihenfolge der Tauschaktionen immer so angeordnet werden, dass am Ende jedes Kind Bonbons von jeder Sorte hat?

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 5 Stunden. Viel Erfolg!