O Oberstufe

Aufgabe 1 (4 P.)**.** Beweise, dass jedes Vieleck, das einen Inkreis besitzt, drei Seiten hat, die ein Dreieck bilden können.

Aufgabe 2 (6 P.)**.** An einer kreisförmigen Straße sind in gleichen Abständen (zum jeweiligen Vorgänger und Nachfolger) 25 Polizisten platziert. Jeder Polizist trägt eine Marke mit einer eindeutigen Nummer von 1 bis 25. Die Polizisten bekommen eine Anweisung, so ihre Positionen zu vertauschen, dass ihre Marken entlang der Strecke im Uhrzeigersinn aufeinanderfolgend von 1 bis 25 nummeriert sind. Beweise: Wenn die Polizisten beim Tauschen alle zusammen eine möglichst geringe Strecke entlang der Straße zurücklegen möchten, dann bleibt mindestens einer an seiner ursprünglichen Position.

Aufgabe 3 (6 P.)**.** Gregory hat 100 Zahlen auf eine Tafel geschrieben und deren Produkt berechnet. Dann hat er jede Zahl um 1 erhöht und dabei beobachtet, dass sich das Produkt aller nicht verändert hat. Daraufhin hat er wieder alle Zahlen um 1 erhöht und wieder hat sich das Produkt nicht verändert. Diese Prozedur hat er k-mal ausgeführt und jedes Mal dasselbe Produkt erhalten. Finde den größtmöglichen Wert von k.

Aufgabe 4 (7 P.)**.** Ein Kreis sei in ein Dreieck ΔABC einbeschrieben und berühre die Seiten BC, CA und AB an den Punkten A', B' bzw. C'. Die drei Geraden AA', BB' und CC' treffen sich im Punkt G. Es seien C_A und C_B die Schnittpunkte des Umkreises um das Dreieck $\Delta GA'B'$ mit den Geraden AC bzw. BC, die nicht B' bzw. A' sind. Analog seien A_B, A_C, B_C und B_A definiert. Beweise, dass die Punkte C_A, C_B, A_B, A_C, B_C und B_A auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

Aufgabe 5 (7 P.)**.** Pete zählt alle möglichen Wörter bestehend aus m Buchstaben, so dass jeder Buchstabe nur „T“, „O“, „W“ oder „N“ ist und so dass das Wort gleich viele „T“s und „O“s enthält. Basil zählt alle möglichen Wörter bestehend aus $2m$ Buchstaben, so dass nur die Buchstaben „T“ und „O“ vorkommen und zwar gleich häufig. Welcher der beiden Jungen hat mehr Wörter gezählt?

Aufgabe 6 (8 P.)**.** Es gab ein Dreieck aus Draht mit Innenwinkeln $x°$, $y°$ und $z°$. Der schelmische Nick hat jede Seite in je einem Punkt um 1 Grad verbogen und dadurch ein Sechseck mit Innenwinkeln $(x-1)°$, $181°$, $(y-1)°$, $181°$, $(z-1)°$ und $181°$ erhalten. Beweise, dass die Biegepunkte die Seiten des ursprünglichen Dreiecks jeweils im selben Verhältnis teilen.

Aufgabe 7 (10 P.)**.** In einem Königreich werden Gold- und Platinsand als Währungen benutzt. Der Wechselkurs wird durch zwei positive ganze Zahlen g und p definiert, so dass x Gramm Gold y Gramm Platin entsprechen, wenn $xg = yp$ (dabei müssen x und y nicht notwendig ganzzahlig sein). An einem Tag, an dem die Zahlen $g = p = 1001$ sind, verkündet das Schatzamt, dass an jedem der folgenden Tage genau eine der Zahlen g und p um 1 verkleinert wird, so dass beide Zahlen nach 2000 Tagen 1 sind. Allerdings wird die genaue Abfolge, in welche die Zahlen verringert werden, nicht verkündet. An dem Tag hat ein Bänker 1 kg Goldsand und 1 kg Platinsand. Das Ziel des Bänkers ist nun, in der Zeitspanne so Tauschgeschäfte zu machen, dass er am Ende mindestens 2 kg Goldsand und 2 kg Platinsand hat. Kann er dieses Ziel in jedem Fall erreichen?

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4,5 Stunden. Viel Erfolg!