Städtewettbewerb Herbst 2013 Lösungsvorschläge

Hamburg

28. Oktober 2013 [Version 9. Dezember 2013]

M Mittelstufe

Aufgabe M.1 (5 P.)**.** Man hat 100 rote, 100 gelbe und 100 grüne Stäbe. Es ist bekannt, dass man aus jeder Kombination von drei Stäben immer ein Dreieck legen kann, wenn ein Stab rot, einer gelb und einer grün ist. Zeige, dass es eine Farbe gibt, so dass man aus jeder Kombination von drei Stäben dieser Farbe ein Dreieck legen kann.

Lösung. Man betrachte den (bzw. einen der) größten aller Stäbe, dieser sei ohne Einschränkung rot (sonst werden die Farben unbenannt). Außerdem betrachte man jeweils den (bzw. einen der) kleinsten Stäbe der beiden anderen Farben, der kleinere sei ohne Einschränkung grün und der größere gelb (sonst werden wieder die Farben unbenannt). Aus diesen drei Stäben kann man ein Dreieck legen, also sind der grüne und gelbe zusammen größer als der rote. Für beliebige drei gelbe Stäbe gilt dasselbe, da die beiden kleinsten zumindest so groß sind wie der oben betrachtete gelbe Stab und der größte höchstens so groß ist wie der oben betrachtete rote Stab. Also kann man aus beliebigen drei gelben Stäben ein Dreieck legen. □

Aufgabe M.2 (5 P.)**.** Ein Mathelehrer wählt zehn aufeinanderfolgende positive ganze Zahlen und teilt diese Pete und Basil mit. Jeder der beiden teilt diese Zahlen in fünf Paare auf und berechnet zuerst für jedes Paar das Produkt der beiden Zahlen und dann die Summe dieser Produkte. Zeige, dass die beiden Jungen unabhängig von der Wahl des Mathelehrers das gleiche Ergebnis erhalten können, ohne die gleiche Aufteilung in Paare gewählt zu haben.

Lösung. Für die Zahlen von 1 bis 10 kann Pete die Paare $(1,2)$, $(3,6)$, $(4,5)$, $(7,8)$ und $(9,10)$ wählen und Basil die Paare $(1,4)$, $(2,3)$, $(5,6)$, $(7,8)$ und $(9,10)$, da

$$1\cdot 2+3\cdot 6+4\cdot 5=40=1\cdot 4+2\cdot 3+5\cdot 6$$

ist (und das Hinzuaddieren von $7\cdot 8+9\cdot 10$ auf beiden Seiten die Gleichheit nicht verändert).

Hat der Lehrer nun $n+1$ als kleinste der zehn aufeinanderfolgenden Zahlen ausgesucht, so addiert man im obigen Beispiel einfach zu jeder der zehn Zahlen n. Die Gesamtsumme steigt sowohl für Pete als auch für Basil um $1n+2n+\cdots+10n$ und um $5n^2$, da genau diese Terme zusätzlich beim Ausmultiplizieren der Paare entstehen, zum Beispiel $(1+n)\cdot(2+n)=1\cdot 2+1n+2n+n^2$, $(3+n)\cdot(6+n)=3\cdot 6+3n+6n+n^2$ usw.

Bemerkung: Schon mit den Zahlen von 1 bis 6 hat man sechs verschiedene Möglichkeiten, Paare wie gewünscht zu wählen: $1\cdot6+2\cdot4+3\cdot5 = 1\cdot5+2\cdot6+3\cdot4$, $1\cdot5+2\cdot4+3\cdot6 = 1\cdot4+2\cdot6+3\cdot5$, $1\cdot6+2\cdot3+4\cdot5 = 1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6$, $1\cdot5+2\cdot3+4\cdot6 = 1\cdot3+2\cdot6+4\cdot5$, $1\cdot4+2\cdot3+5\cdot6 = 1\cdot2+3\cdot6+4\cdot5$ oder $1\cdot3+2\cdot4+5\cdot6 = 1\cdot2+3\cdot5+4\cdot6$. Die Summe ist nur für die fehlenden drei Auswahlen an Paaren eindeutig. □

Aufgabe M.3 (6 P.)**.** Das Dreieck $\triangle ABC$ habe einen rechten Winkel bei C. Es sei N der Mittelpunkt des Halbkreisbogens, der die Kante BC als Durchmesser hat und außerhalb des Dreiecks liegt. Zeige, dass die Strecke AN die Winkelhalbierende von $\angle ACB$ in deren Mitte trifft.

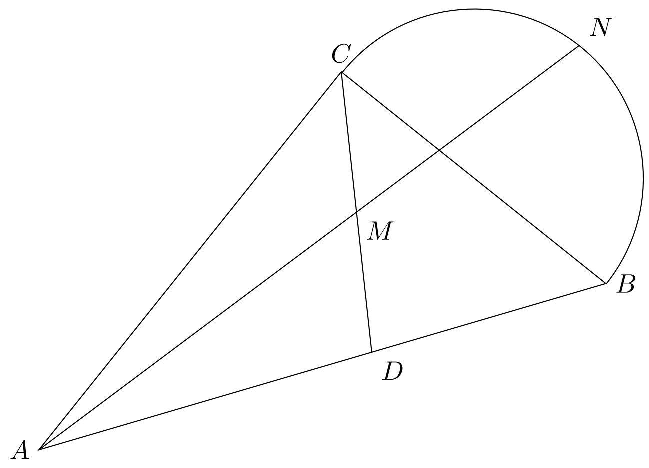


Abbildung 1: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.3

Lösung. Der Schnittpunkt von AN mit der Winkelhalbieren sei M. Ferner sei D der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit der Seite BA (siehe Abbildung 1).

Zunächst ist klar, dass der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ΔABC gleich $\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BC|$ ist oder in Kurzform $F(\Delta ABC) = \frac{1}{2}ab$ mit $a = |BC|$ und $b = |AC|$. Nun verlaufen die Geraden NB und CD parallel, denn es ist $\angle CNB = 90°$ (Thales) und $\angle DCN = \angle DCB + \angle BCN = 45° + 45° = 90°$ (Winkelhalbierende und gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck). Also ist $F(\Delta MCN) = F(\Delta MCB)$.

Der Abstand von N zu (der Verlängerung von) AC ist $\frac{a}{2}$, da N auf der Mitte des Halbkreisbogens über BC liegt. Also ist $F(\Delta ACN) = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}b = \frac{1}{4}ab = \frac{1}{2}F(\Delta ABC)$.

Also ist $F(\Delta MAC)+F(\Delta MCB) = \frac{1}{2}ab$, so dass $F(\Delta BAM) = \frac{1}{2}F(\Delta BAC)$ gilt. Somit hat das Dreieck ΔBAM über der Seite BA genau die halbe Höhe wie das Dreieck ΔBAC und M ist daher der Mittelpunkt von CD. □

Aufgabe M.4 (7 P.)**.** In die Ebene sei ein Schachbrett gemalt. Pete sucht sich einen Punkt im Inneren eines der 64 Felder aus. Nun darf Basil ein beliebiges Vieleck (ohne Überschneidung oder Berührung von Kanten) in die Ebene zeichnen, woraufhin Pete ihm sagt, ob der gewählte Punkt innerhalb oder außerhalb des Vielecks liegt. Wie oft muss Basil dies tun, um mit Sicherheit sagen zu können, ob der Punkt in einem weißen oder schwarzen Feld liegt?

LÖSUNG. Basil muss zwei Vielecke zeichnen. Hierzu kann eines der beiden vom Schachbrett genau die geraden Zeilen enthalten und das andere genau die geraden Spalten. Solche Vielecke sind in Abbildung 2 zu sehen. Nach den Antworten von Pete weiß Basil, ob die Zeile des Feldes gerade oder ungerade ist, ebenso für die Spalte. Da die schwarzen Felder genau die Felder sind, für die Zeile und Spalte beide gerade oder beide ungerade sind, kann er hieraus erkennen, ob das Feld schwarz oder weiß ist. Kurz: Liegt der Punkte beide Male innerhalb oder beide Male außerhalb, so ist das Feld schwarz, anderenfalls ist es weiß.

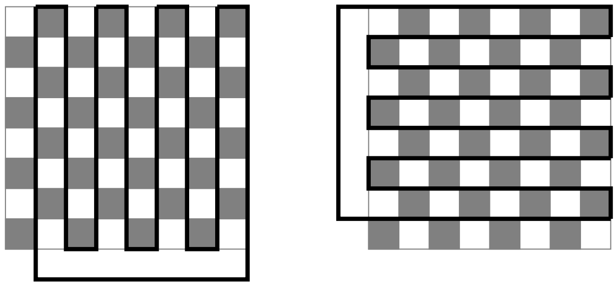


Abbildung 2: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.4

Ein Vieleck reicht Basil offenbar nicht aus, denn ansonsten müssten für dieses Vieleck alle schwarzen Felder innerhalb und alle weißen Felder außerhalb liegen (oder umgekehrt), was nicht möglich ist. □

Aufgabe M.5 (9 P.)**.** Ein 101-Eck ist in einen Kreis einbeschrieben. Von jeder Ecke zeichnet man nun eine Senkrechte auf die gegenüberliegende Kante oder deren Verlängerung. Zeige, dass für mindestens eine Ecke diese Senkrechte tatsächlich die gegenüberliegende Kante trifft.

LÖSUNG. Nehmen wir an, dass keine Senkrechte die gegenüberliegende Kante trifft. Wir führen diese Annahme zum Widerspruch. Für jeden Eckpunkt A betrachte man den Punkt B, der 50 Ecken im Uhrzeigersinn entfernt ist, und den Punkt C, der 50 Ecken gegen den Uhrzeigersinn entfernt ist. Wären die Winkel $\angle ABC$ und $\angle BCA$ beide kleiner als $90°$, so würde die Senkrechte von A auf BC das Innere der Seite treffen. Es muss daher $\angle ABC$ oder $\angle BCA$ größer gleich $90°$ sein.

Es bezeichne $\overset{\frown}{AC}$ den Bogen auf dem Ausgangskreis von A zu C, welcher B nicht schneidet. Entsprechend seien $\overset{\frown}{BC}$ und $\overset{\frown}{AB}$ die Bögen auf dem Ausgangskreis, welche A bzw. C nicht schneiden.

Ist $\angle ABC \geq 90°$, dann ist der Bogen $\overset{\frown}{AC}$, welcher B nicht schneidet, größer gleich $180°$ (Peripheriewinkelsatz). Ist $\angle BCA \geq 90°$, dann ist der Bogen $\overset{\frown}{AB}$, welcher C nicht schneidet, größer gleich $180°$.

Der jeweils andere Bogen muss kleiner als $180°$ sein, da sich die Längen der Bögen $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BC}$ und $\overset{\frown}{AB}$ zu $360°$ addieren.

Es gilt daher für jeden Punkt, dass von den zwei Bögen, die von diesem Punkt ausgehen und 51 Ecken umfassen, genau einer größer gleich $180°$ und genau einer kleiner als $180°$ ist.

Man betrachte nun zwei Bögen, die sich 50 Ecken teilen, aber in jeweils einer Ecke unterscheiden. Das Komplement der Vereinigung dieser Bögen ist auch ein Bogen, der 51 Ecken überspannt. Dieser hat jeweils einen gemeinsamen Punkt mit den beiden Ausgangsbögen. Ist er kleiner als 180°, so sind die beiden Ausgangsbögen größer gleich 180°. Ist er größer gleich 180°, so sind die beiden Ausgangsbögen kleiner 180°.

Betrachtet man zu einem Bogen über 51 Ecken, welcher größer gleich 180° ist, dessen Nachbarn, die sich nur um eine Ecke unterscheiden, so müssen diese auch größer gleich 180° sein. Daraus würde folgen, dass alle Bögen über 51 Ecken größer gleich 180° sind. Dies ist aber ein Widerspruch, da wir bereits gezeigt haben, dass von je zwei solchen Bögen, die genau einen Punkt gemeinsam haben, genau einer größer gleich 180° ist. Somit ist die Annahme, dass keine Senkrechte das Innere einer gegenüberliegenden Seite trifft, zum Widerspruch geführt. □

Aufgabe M.6 (10 P.)**.** Die Zahl

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

wird als gekürzter Bruch dargestellt. Zeige, dass der Zähler dieses Bruches ein Vielfaches von $3n+1$ ist, falls $3n+1$ eine Primzahl ist.

Lösung. Es sei $p = 3n+1$ eine Primzahl. Dann gilt

$$\begin{aligned}
A &:= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}.
\end{aligned}$$

Diese n Brüche lassen sich nun paarweise (n ist gerade, da ja p als Primzahl ungerade ist) so zusammenfassen, dass ihre Summe stets durch p teilbar ist:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n} &= \frac{3n+1}{(n+1)(2n)} = \frac{p}{(n+1)(2n)}, \\
\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2n-1} &= \frac{3n+1}{(n+2)(2n-1)} = \frac{p}{(n+2)(2n-1)} \\
&\text{usw.}
\end{aligned}$$

Da die Nenner zu p teilerfremd sind, ist A durch p teilbar. □

Aufgabe M.7 (12 P.)**.** Auf einem Tisch liegen 11 Stapel mit jeweils zehn Steinen. Pete und Basil spielen nun das folgende Spiel, bei dem sie abwechselnd Steine nehmen: Pete darf in jedem Zug nur von einem Stapel Steine nehmen, während Basil zwar Steine von mehreren Stapeln nehmen darf, aber nicht mehr als einen pro Stapel. Jeder der beiden muss in jedem Zug mindestens einen und höchstens drei Steine nehmen. Pete beginnt. Es verliert, wer zuerst nicht mehr ziehen kann. Welcher der beiden Spieler kann unabhängig von der Spielweise des Gegners den Sieg erzwingen?

Lösung. Basil kann mit folgender Strategie immer gewinnen.

In einem 11×11-Quadrat entsprechen die Kästchen einer Spalte oberhalb und unterhalb der Diagonale zusammen jeweils einem Haufen. Der Zweite (Basil) spielt nun jeweils den an der Diagonalen gespiegelten Zug des Gegners (Pete), so dass er den letzten Zug machen kann und gewinnt. □

O Oberstufe

Aufgabe O.1 (5 P.)**.** In die Ebene sei ein Schachbrett gemalt. Pete sucht sich einen Punkt im Inneren eines der 64 Felder aus. Nun darf Basil ein beliebiges Vieleck (ohne Überschneidung oder Berührung von Kanten) in die Ebene zeichnen, woraufhin Pete ihm sagt, ob der gewählte Punkt innerhalb oder außerhalb des Vielecks liegt. Wie oft muss Basil dies tun, um mit Sicherheit sagen zu können, ob der Punkt in einem weißen oder schwarzen Feld liegt?

Lösung. Siehe Lösung von Aufgabe M.4. □

Aufgabe O.2 (6 P.)**.** Bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, für die gilt:

> Für jede zwei Polynome $P(x)$ und $Q(x)$ vom Grad n gibt es Monome ax^k und bx^ℓ mit $0 \leq k, \ell \leq n$, so dass die Funktionsgraphen von $P(x) + ax^k$ und $Q(x) + bx^\ell$ keine gemeinsamen Punkte haben.

Lösung. Die Aussage gilt genau für $n = 1$ und alle geraden n.

Für gerade n verändert man ggf. den ersten Koeffizienten des ersten Polynoms, so dass beide unterschiedliches Vorzeichen vor dem ersten Koeffizienten haben. Dann verändert man den letzten Koeffizienten des zweiten Polynoms, so dass das Maximum des Polynoms mit negativen ersten Koeffizienten kleiner ist als das Minimum des Polynoms mit positivem ersten Koeffizienten.

Für $n = 1$ kann man den ersten Koeffizienten des ersten Polynoms so verändern, dass beide denselben haben, und den zweiten Koeffizienten des zweiten Polynoms so verändern, dass beide sich darin unterscheiden. Die Graphen sind dann parallele unterschiedliche Geraden, die somit keinen Schnittpunkt haben.

Für ungerades $n \neq 1$ betrachtet man die folgenden beiden Polynome: Das erste habe jeden zweiten Koeffizienten 2 und die restlichen 0, das zweite habe jeden zweiten Koeffizienten 1 und die restlichen 0. Die Differenz der veränderten Polynome darf keinen ungeraden Grad haben, weil sie sonst immer eine Nullstelle hätte und somit die Polynome einen Schnittpunkt hätten. Also muss bei einem der Polynome der erste Koeffizient verändert werden, so dass beide Polynome denselben haben. Verändert man nicht den zweiten Koeffizienten eines der Polynome, so hat die Differenz weiterhin ungeraden Grad oder wird das Nullpolynom: Wenn man den dritten Koeffizienten angleicht, ist der Grad der Differenz $n - 4$ für $n \geq 5$ oder wird das Nullpolynom für $n = 3$. Belässt man zweiten und dritten Koeffizienten, hat die Differenz Grad $n - 2$. Verändert man dagegen den zweiten Koeffizienten, so haben beide Polynome weiterhin einen letzten Koeffizienten 0, haben also einen Schnittpunkt im Ursprung. □

Aufgabe O.3 (6 P.)**.** Es sei $\triangle ABC$ ein gleichseitiges Dreieck mit Mittelpunkt O. Eine Gerade durch C schneidet den Umkreis des Dreiecks $\triangle ABO$ in den Punkten D und E. Zeige, dass A, O und die Mittelpunkte der Strecken BD und BE auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

Lösung. Zunächst wird gezeigt, dass AC tangential zum Umkreis des Dreiecks ΔABO verläuft: $\angle AOB = 120°$, da es ein Zentrumswinkel des gleichseitigen Dreiecks ΔABC ist. Nach Peripheriewinkelsatz sind somit im Umkreis des Dreiecks ΔABO die Winkel auf der anderen Seite der Sehne AB jeweils $180° - \angle AOB = 60°$ und der Winkel am Zentrum Z zu dieser Sehne $\angle BZA = 2{\cdot}60° = 120°$. Im Gleichschenkligen Dreieck ΔAZB ist dann $\angle ZAB = \frac{1}{2}(180° - \angle BZA) = 30°$. Also ist $\angle ZAC = \angle ZAB + \angle BAC = 30° + 60° = 90°$, wie behauptet verläuft AC tangential zum Umkreis des Dreiecks ΔABO.

Es liege nun ohne Einschränkung E auf der Strecke CD, E' sei der Mittelpunkt von BE und D' der Mittelpunkt von BD (siehe Abbildung 3).

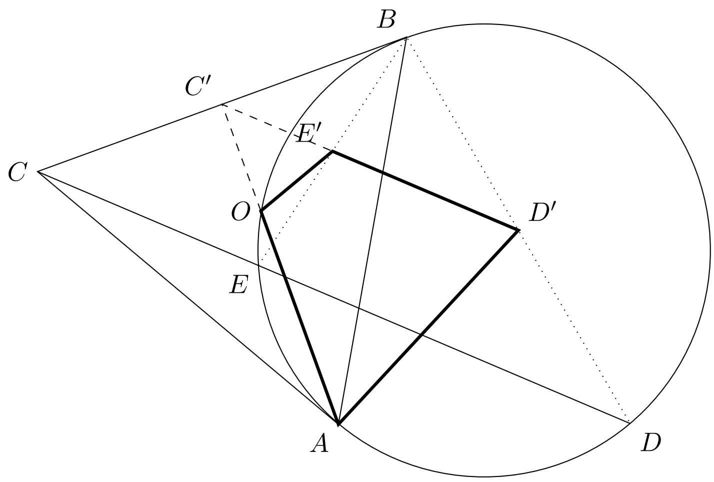


Abbildung 3: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.3

Des Weiteren sei C' der Mittelpunkt von BC. Es soll nun

$$C'O \cdot C'A = C'E' \cdot C'D'$$

gezeigt werden, da dann nach der Umkehrung des Sehnen-Tangentensatzes A, O, D' und E' auf einem Kreis liegen.

$C'E' \cdot C'D' = \frac{1}{2}CE \cdot \frac{1}{2}CD$, da $C'D'$ das Dreieck ΔCDB halbiert. Nach Sehnen-Tangentensatz am Umkreis um ΔABO ist $\frac{1}{4}CE \cdot CD = \frac{1}{4}CB^2 = C'B^2$. Wieder nach Sehnen-Tangentensatz ist $C'B^2 = C'O \cdot C'A$, also gilt insgesamt $C'O \cdot C'A = C'E' \cdot C'D'$ und A, O, D' und E' liegen wie behauptet auf einem Kreis. □

Aufgabe O.4 (7 P.)**.** Ist es wahr, dass jede ganze Zahl die Summe von endlich vielen dritten Potenzen paarweise verschiedener ganzer Zahlen ist? (Natürlich soll ein Beweis oder Gegenbeispiel angegeben werden.)

Lösung. Die Behauptung ist wahr. Um dies zu beweisen, stellen wir zuerst fest, dass $0 = 0^3$ Summe von dritten Potenzen ist. Außerdem genügt es zu zeigen, dass jede natürliche Zahl eine solche Summe ist, die negativen Zahlen folgen dann leicht: Ist etwa $n = a_1^3 + \cdots + a_k^3$, dann ist $-n = (-a_1)^3 + \cdots + (-a_k)^3$.

Wir behaupten, dass 1 auf unendlich viele Arten als Summe von dritten Potenzen dargestellt werden kann, wobei jede Zahl in höchstens einer Darstellung vorkommen wird. Um eine natürliche Zahl n darzustellen, genügen dann die Zahlen aus n verschiedenen Darstellungen der 1.

Angenommen, wir haben endlich viele Darstellungen von 1 als Summe von dritten Potenzen gegeben. Wir wählen nun eine natürliche Zahl a, die größer ist als alle Beträge von Zahlen, deren dritte Potenzen wir in den gewählten Darstellungen von 1 benutzt haben. Die binomische Formel für dritte Potenzen ergibt

$$\begin{aligned} & (3a^3+1)^3 = (3a^3)^3 + 3\cdot(3a^3)^2 + 3\cdot 3a^3 + 1 \\ \iff \quad & 1 = (3a^3+1)^3 - (3a^3)^3 - 3(3a^3)^2 - 3\cdot 3a^3 \\ & = (3a^3+1)^3 + (-3a^3)^3 - 27a^6 - 9a^3 \\ & = (3a^3+1)^3 + (-3a^3)^3 + (-3a^2)^3 - 8a^3 - a^3 \\ & = (3a^3+1)^3 + (-3a^3)^3 + (-3a^2)^3 + (-2a)^3 + (-a)^3. \end{aligned}$$

Da wir a größer als alle (Beträge von) bisher verwendeten Zahlen gewählt haben, ist keine dieser fünf dritten Potenzen Teil einer der bisher gewählten Darstellungen. Also finden wir zu endlich vielen Darstellungen von 1 immer eine weitere, die keine der verwendeten Zahlen erneut benutzt. Somit gibt es unendlich viele Darstellungen, die keine Zahlen gemeinsam haben, was (wie oben gezeigt) beweist, dass jede Zahl Summe paarweise verschiedener dritter Potenzen ist. □

Aufgabe O.5. Existieren Funktionen f und g, die ausschließlich ganzzahlige Werte annehmen und die für jede ganze Zahl x die folgenden Bedingungen erfüllen?

(a) (3 P.) $f(f(x)) = x$, $g(g(x)) = x$, $f(g(x)) > x$ und $g(f(x)) > x$ beziehungsweise

(b) (5 P.) $f(f(x)) < x$, $g(g(x)) < x$, $f(g(x)) > x$ und $g(f(x)) > x$?

Lösung. (a) Benutzt man die ersten beiden Gleichungen, erhält man

$$f(g(g(f(x)))) = f(f(x)) = x.$$

Es können also nicht gleichzeitig die letzten beiden Ungleichungen gelten.

(b) Es sei

$$f(x) = \begin{cases} |x|+1 & x \text{ ungerade} \\ -|x|-2 & x \text{ gerade} \end{cases}$$

und

$$g(x) = \begin{cases} -|x|-2 & x \text{ ungerade} \\ |x|+1 & x \text{ gerade} \end{cases}.$$

Es bildet also f nur auf gerade und g nur auf ungerade Zahlen ab. Man rechnet deshalb einfach nach:

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= -|f(x)| - 2 \le -||x|+1| - 2 = -|x| - 3 < x, \\ g(g(x)) &= -|g(x)| - 2 \le -||x|+1| - 2 = -|x| - 3 < x, \\ f(g(x)) &= |g(x)| + 1 \ge ||x|+1| + 1 = |x| + 2 > x \text{ und} \\ g(f(x)) &= |f(x)| + 1 \ge ||x|+1| + 1 = |x| + 2 > x. \end{aligned}$$

□

Aufgabe O.6 (9 P.)**.** Auf einem Tisch liegen 11 Stapel mit jeweils zehn Steinen. Pete und Basil spielen nun das folgende Spiel, bei dem sie abwechselnd Steine nehmen: Pete darf in jedem Zug nur von einem Stapel Steine nehmen, während Basil zwar Steine von mehreren Stapeln nehmen darf, aber nicht mehr als einen pro Stapel. Jeder der beiden muss in jedem Zug mindestens einen und höchstens drei Steine nehmen. Pete beginnt. Es verliert, wer zuerst nicht mehr ziehen kann. Welcher der beiden Spieler kann unabhängig von der Spielweise des Gegners den Sieg erzwingen?

Lösung. Siehe Lösung von Aufgabe M.7. □

Aufgabe O.7 (14 P.)**.** In der Ebene ist ein geschlossener Streckenzug gegeben. Jede dieser Strecken wird (außer an ihren Endpunkten) in genau einem Punkt von einer anderen Strecke geschnitten und keine drei Strecken schneiden sich im gleichen Punkt. Außerdem treten keine dieser Schnittpunkte an den Endpunkten der Strecken auf und keine zwei Strecken haben einen gemeinsamen Abschnitt. Ist es möglich, dass jeder Schnittpunkt von zwei Strecken beide Strecken halbiert?

Lösung. Es ist nicht möglich, dass jeder Schnittpunkt von zwei Strecken beide halbiert.

Zunächst wird bewiesen, dass ein Streckenzug (mit Selbstüberschneidungen), bei dem sich nie mehr als zwei Strecken in einem Punkt schneiden, die Ebene in verschiedene Regionen aufteilt, die jeweils in schwarz bzw. weiß gefärbt werden können, so dass jeder Abschnitt zwischen Schnitt- bzw. Streckenendpunkten jeweils auf der einen Seite eine schwarze und auf der anderen eine weiße Fläche hat: Man dreht dazu den Streckenzug so, dass keine Strecke vertikal verläuft und zählt auf jedem vertikalen Strahl von oberhalb des Streckenzugs, wie häufig er den Streckenzug geschnitten hat. Ist die Zahl für einen Punkt einer Region ungerade, so wird er schwarz gefärbt, ist die Zahl gerade, so wird er weiß gefärbt. Die Punkte einer Region haben dieselbe Farbe, da die Strahlen sowohl bei Selbstüberschneidungen (S in Abbildung 4), als auch bei Endpunkten T in Abbildung 4) jeweils den Streckenzug zweimal schneiden.

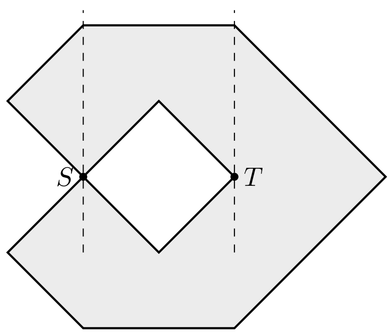
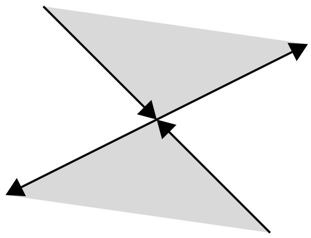
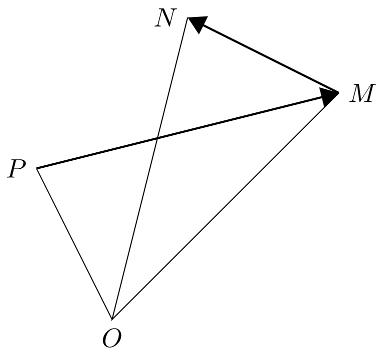


Abbildung 4: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.7 (übernommen aus den Lösungen des Organisationskomitees in Russland)

Jeder Streckenabschnitt zwischen Schnittpunkten und Endpunkten von zwei Strecken wird nun orientiert und zwar so, dass entlang einer schwarzen Fläche



(a)



(b)

Abbildung 5: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.7 (übernommen aus den Lösungen des Organisationskomitees in Russland): Orientierung (a) und orientierte Flächen (b): Die Fläche von ΔOMN ist positiv und die von ΔOPM ist negativ.

der Rand stets gegen den Uhrzeigersinn orientiert ist (siehe Abbildung 5, links).

Von einem beliebigen Punkt O aus werden nun die orientierten Flächen der Dreiecke aus einem Streckenabschnitt und den Verbindungen von dessen Enden zu O berechnet: Ist der Streckenabschnitt im Dreieck gegen den Uhrzeigersinn orientiert, sei die Fläche positiv, anderenfalls negativ. Addiert man nun alle diese orientierten Flächen auf, so entspricht die Summe gerade der der schwarzen Regionen insgesamt, da diese ja gerade gegen den Uhrzeigersinn orientiert sind. Wenn die Selbstüberschneidungen nun aber jede Strecke halbierten, wäre sie in zwei Abschnitte geteilt, die entgegengesetzt orientiert sind. Die Summe der orientierten Flächen müsste also Null sein, was einen Widerspruch darstellt. $\square$

Fragen und Anmerkungen. Schicken Sie diese bitte an *Städtewettbewerb Mathematik Hamburg* <stw.m.hh@gmail.com>. An den Lösungen haben mitgewirkt: Jan Christoph Kinne, Prof. Dr. Helmut Müller, Mara Sommerfeld, Philipp Sprüssel und Jan Henrik Sylvester.