M Mittelstufe

Aufgabe 1 (5 P.). Man hat 100 rote, 100 gelbe und 100 grüne Stäbe. Es ist bekannt, dass man aus jeder Kombination von drei Stäben immer ein Dreieck legen kann, wenn ein Stab rot, einer gelb und einer grün ist. Zeige, dass es eine Farbe gibt, so dass man aus jeder Kombination von drei Stäben dieser Farbe ein Dreieck legen kann.

Aufgabe 2 (5 P.). Ein Mathelehrer wählt zehn aufeinanderfolgende positive ganze Zahlen und teilt diese Pete und Basil mit. Jeder der beiden teilt diese Zahlen in fünf Paare auf und berechnet zuerst für jedes Paar das Produkt der beiden Zahlen und dann die Summe dieser Produkte. Zeige, dass die beiden Jungen unabhängig von der Wahl des Mathelehrers das gleiche Ergebnis erhalten können, ohne die gleiche Aufteilung in Paare gewählt zu haben.

Aufgabe 3 (6 P.). Das Dreieck $\triangle ABC$ habe einen rechten Winkel bei C. Es sei N der Mittelpunkt des Halbkreisbogens, der die Kante BC als Durchmesser hat und außerhalb des Dreiecks liegt. Zeige, dass die Strecke AN die Winkelhalbierende von $\angle ACB$ in deren Mitte trifft.

Aufgabe 4 (7 P.). In die Ebene sei ein Schachbrett gemalt. Pete sucht sich einen Punkt im Inneren eines der 64 Felder aus. Nun darf Basil ein beliebiges Vieleck (ohne Überschneidung oder Berührung von Kanten) in die Ebene zeichnen, woraufhin Pete ihm sagt, ob der gewählte Punkt innerhalb oder außerhalb des Vielecks liegt. Wie oft muss Basil dies tun, um mit Sicherheit sagen zu können, ob der Punkt in einem weißen oder schwarzen Feld liegt?

Aufgabe 5 (9 P.). Ein 101-Eck ist in einen Kreis einbeschrieben. Von jeder Ecke zeichnet man nun eine Senkrechte auf die gegenüberliegende Kante oder deren Verlängerung. Zeige, dass für mindestens eine Ecke diese Senkrechte tatsächlich die gegenüberliegende Kante trifft.

Aufgabe 6 (10 P.). Die Zahl

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

wird als gekürzter Bruch dargestellt. Zeige, dass der Zähler dieses Bruches ein Vielfaches von $3n+1$ ist, falls $3n+1$ eine Primzahl ist.

Aufgabe 7 (12 P.). Auf einem Tisch liegen 11 Stapel mit jeweils zehn Steinen. Pete und Basil spielen nun das folgende Spiel, bei dem sie abwechselnd Steine nehmen: Pete darf in jedem Zug nur von einem Stapel Steine nehmen, während Basil zwar Steine von mehreren Stapeln nehmen darf, aber nicht mehr als einen pro Stapel. Jeder der beiden muss in jedem Zug mindestens einen und höchstens drei Steine nehmen. Pete beginnt. Es verliert, wer zuerst nicht mehr ziehen kann. Welcher der beiden Spieler kann unabhängig von der Spielweise des Gegners den Sieg erzwingen?

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4,5 Stunden. Viel Erfolg!

O Oberstufe

Aufgabe 1 (5 P.)**.** In die Ebene sei ein Schachbrett gemalt. Pete sucht sich einen Punkt im Inneren eines der 64 Felder aus. Nun darf Basil ein beliebiges Vieleck (ohne Überschneidung oder Berührung von Kanten) in die Ebene zeichnen, woraufhin Pete ihm sagt, ob der gewählte Punkt innerhalb oder außerhalb des Vielecks liegt. Wie oft muss Basil dies tun, um mit Sicherheit sagen zu können, ob der Punkt in einem weißen oder schwarzen Feld liegt?

Aufgabe 2 (6 P.)**.** Bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, für die gilt:

> Für jede zwei Polynome $P(x)$ und $Q(x)$ vom Grad n gibt es Monome ax^k und bx^ℓ mit $0 \leq k, \ell \leq n$, so dass die Funktionsgraphen von $P(x) + ax^k$ und $Q(x) + bx^\ell$ keine gemeinsamen Punkte haben.

Aufgabe 3 (6 P.)**.** Es sei $\triangle ABC$ ein gleichseitiges Dreieck mit Mittelpunkt O. Eine Gerade durch C schneidet den Umkreis des Dreiecks $\triangle ABO$ in den Punkten D und E. Zeige, dass A, O und die Mittelpunkte der Strecken BD und BE auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

Aufgabe 4 (7 P.)**.** Ist es wahr, dass jede ganze Zahl die Summe von endlich vielen dritten Potenzen paarweise verschiedener ganzer Zahlen ist? (Natürlich soll ein Beweis oder Gegenbeispiel angegeben werden.)

Aufgabe 5. Existieren Funktionen f und g, die ausschließlich ganzzahlige Werte annehmen und die für jede ganze Zahl x die folgenden Bedingungen erfüllen?

(a) (3 P.) $f(f(x)) = x$, $g(g(x)) = x$, $f(g(x)) > x$ und $g(f(x)) > x$ beziehungsweise

(b) (5 P.) $f(f(x)) < x$, $g(g(x)) < x$, $f(g(x)) > x$ und $g(f(x)) > x$?

Aufgabe 6 (9 P.)**.** Auf einem Tisch liegen 11 Stapel mit jeweils zehn Steinen. Pete und Basil spielen nun das folgende Spiel, bei dem sie abwechselnd Steine nehmen: Pete darf in jedem Zug nur von einem Stapel Steine nehmen, während Basil zwar Steine von mehreren Stapeln nehmen darf, aber nicht mehr als einen pro Stapel. Jeder der beiden muss in jedem Zug mindestens einen und höchstens drei Steine nehmen. Pete beginnt. Es verliert, wer zuerst nicht mehr ziehen kann. Welcher der beiden Spieler kann unabhängig von der Spielweise des Gegners den Sieg erzwingen?

Aufgabe 7 (14 P.)**.** In der Ebene ist ein geschlossener Streckenzug gegeben. Jede dieser Strecken wird (außer an ihren Endpunkten) in genau einem Punkt von einer anderen Strecke geschnitten und keine drei Strecken schneiden sich im gleichen Punkt. Außerdem treten keine dieser Schnittpunkte an den Endpunkten der Strecken auf und keine zwei Strecken haben einen gemeinsamen Abschnitt. Ist es möglich, dass jeder Schnittpunkt von zwei Strecken beide Strecken halbiert?

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4,5 Stunden. Viel Erfolg!