Städtewettbewerb Frühjahr 2012
Lösungsvorschläge

Hamburg

22. März 2012 [Version 7. April 2012]

M Mittelstufe

Aufgabe M.1 (3 P.)**.** Ein Schatz ist unter einem Feld eines 8×8-Bretts vergraben. Unter jedem anderen Feld liegt eine Nachricht, welche die minimale Anzahl an Schritten angibt, die benötigt wird, um das Feld mit dem Schatz zu erreichen. (Hierbei führt ein Schritt stets auf ein Feld, das eine gemeinsame Seite mit dem Ausgangsfeld hat.) Welches ist die minimale Anzahl an Feldern, unter denen man graben muss, damit man den Schatz sicher erhält?

Lösung. Egal unter welchem Feld man als erstes gräbt, kann der Schatz auf einem der Nachbarfelder liegen und man weiß nicht unter welchem. Man kann also nicht sicher den Schatz erhalten, wenn man zweimal gräbt.

Wenn man aber dreimal gräbt, kann man stets den Schatz finden: Zuerst gräbt man in der Ecke links oben. Man ermittelt nun ein Feld am linken oder unteren Rand, das minimal mit der Anzahl an Schritten aus der ersten Nachricht erreicht werden kann; dort gräbt man als zweites. Alle anderen Felder, die vom ersten Feld in dieser Anzahl an Schritten erreicht werden können, liegen in der Diagonalen, die vom zweiten Feld nach rechts oben führt. Aus der zweiten Nachricht kann man folgern, wie viele Felder entlang der Diagonalen der Schatz entfernt liegt, indem man nämlich die Zahl der zweiten Nachricht halbiert. Spätestens beim dritten Graben kann man also den Schatz finden. □

Aufgabe M.2 (4 P.)**.** Gibt es eine positive ganze Zahl mit einer ungeraden Anzahl an geraden positiven Teilern und einer geraden Anzahl an ungeraden positiven Teilern?

Lösung. Nein, eine solche Zahl gibt es nicht.

Sei n eine beliebige Zahl. Man ermittelt nun, wie häufig man n durch 2 teilen kann, und nennt diese Zahl k. (n ist also durch 2^k, aber nicht durch 2^{k+1} teilbar.) Zu jedem ungeraden Teiler u von n gibt es nun die geraden Teiler $2^1 \cdot u$, $2^2 \cdot u, \ldots, 2^k \cdot u$. Da diese für verschiedene u alle verschieden sind, gibt es also k-mal so viele gerade wie ungerade Teiler. Bei einer geraden Anzahl ungerader Teiler gibt es also auch eine gerade Anzahl gerader Teiler. □

Aufgabe M.3 (4 P.)**.** Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm. Die Inkreise der Dreiecke ΔABC und ΔCDA berühren die Diagonale AC im Punkt X bzw. Y. Die Inkreise der Dreiecke ΔBCD und ΔDAB berühren die Diagonale BD im Punkt Z bzw. T. Beweise, dass die Punkte X, Y, Z und T Ecken eines Rechtecks sind, sofern sie (paarweise) verschieden sind.

LÖSUNG. Es sei M der Schnittpunkt der Diagonalen des Parallelogramms. Ohne Einschränkung sei $|AB| > |BC|$ (bei Gleichheit sind alle vier betrachteten Dreiecke gleichschenklig und die vier Punkte fallen daher alle mit M zusammen; im Fall $|BC| > |AB|$ benennt man die Punkte einfach um). Dann ist die Lage der Punkte wie in Abbildung 1, von M aus gesehen also X Richtung C, Y Richtung A, Z Richtung B und T Richtung D. (Dies folgt aus der folgenden Formel für den Seitenabschnitt bis zum Berührpunkt des Inkreises, Beweis siehe unten.)

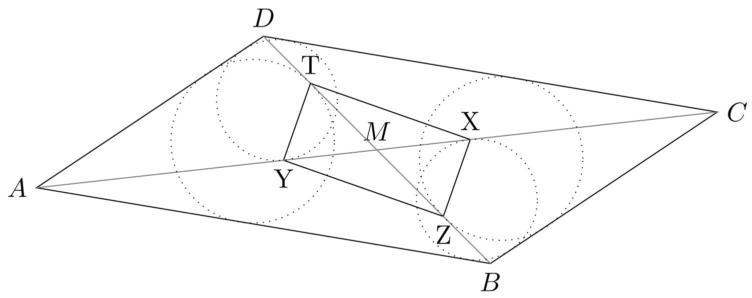

Abbildung 1: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.3.

Da X Berührpunkt des Inkreises von ΔABC ist, gilt

$$|CX| = \frac{|AB| + |BC| + |CA|}{2} - |AB| = \frac{|CA|}{2} + \frac{|BC| - |AB|}{2}$$

und, da im Parallelogramm $|CM| = \frac{|CA|}{2}$ gilt, folgt

$$|MX| = |CM| - |CX| = \frac{|AB| - |BC|}{2}.$$

Entsprechend ist Z Berührpunkt des Inkreises von ΔBCD und es gilt

$$|BZ| = \frac{|BC| + |CD| + |DB|}{2} - |CD| = \frac{|DB|}{2} + \frac{|BC| - |CD|}{2}$$

mit den Parallelogrammeigenschaften $|BM| = \frac{|BD|}{2}$ und $|CD| = |AB|$ folgt auch

$$|MZ| = |BM| - |BZ| = \frac{|AB| - |BC|}{2}.$$

Genauso folgt auch

$$|MY| = |MT| = \frac{|AB| - |BC|}{2} = |MX| = |MZ|\,,$$

X und Y liegen also auf dem Thaleskreis über ZT und Z und T auf dem Thaleskreis über XY, $XTYZ$ ist folglich ein Rechteck.

Zur Vervollständigung noch ein Beweis über den Seitenabschnitt bis zum Berührpunkt des Inkreismittelpunktes: In einem Dreieck ΔABC seien X_A, X_B und X_C die Berührpunkte des Inkreises mit den Seiten, die A, B bzw. C gegenüberliegen (siehe Abbildung 2).

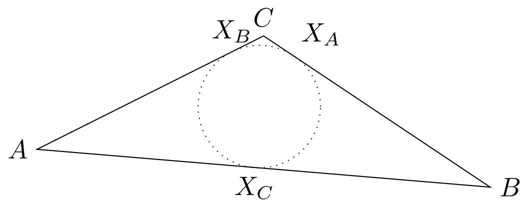

Abbildung 2: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe M.3.

Da $|AX_C| = |AX_B|$, $|BX_A| = |BX_C|$ und $|CX_B| = |CX_A|$ ist, gilt

$$2\,|AX_C| + 2\,|BX_C| + 2\,|CX_B| = |AB| + |BC| + |CA|\,.$$

Ersetzt man $|BX_C| = |AB| - |AX_C|$ und $|CX_B| = |CA| - |AX_C|$, so erhält man

$$|AB| + |CA| - 2\,|AX_C| = |BC|\,,$$

also auch die oben benutzte Formel

$$|AX_C| = \frac{|AB| + |BC| + |CA|}{2} - |BC|\,. \qquad \square$$

Aufgabe M.4. Im Ausdruck

$$10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1$$

werden so Klammern gesetzt, dass das Ergebnis eine ganze Zahl ist.

(a) (2 P.) Was ist der maximal mögliche Wert dieser ganzen Zahl?

(b) (3 P.) Was ist der minimal mögliche Wert dieser ganzen Zahl?

Lösung. (a) Es ist

$$\begin{aligned} 10 : (9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1) =& \frac{10 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{9} \\ =& 10 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 44800. \end{aligned}$$

Dieses ist der maximale Wert, da unabhängig von den Klammern immer durch 9 geteilt wird.

(b) Es ist

$$10 : 9 : (8 : 7 : (6 : (5 : 4 : (3 : 2 : 1)))) = \frac{10 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}{9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1} = 7.$$

Dieses ist der minimale Wert, da keine andere Zahl zwischen 1 und 10 durch 7 teilbar ist, 7 also im Zähler stehen muss. $\square$

Aufgabe M.5 (5 P.)**.** Rhinos Haut hat vertikale und horizontale Falten an seinen Seiten, insgesamt 17. Wenn Rhino eine seiner Seiten an einem Baum kratzt, verschwinden entweder zwei horizontale oder zwei vertikale Falten an dieser Seite, aber zwei neue Falten entstehen an der anderen, und zwar eine horizontale und eine vertikale. (Falls es an der Seite, an der er sich kratzt, weniger als zwei horizontale und weniger als zwei vertikale Falten gibt, passiert nichts.) Kann es passieren, dass auf jeder Seite die Anzahl an vertikalen und horizontalen Falten vertauscht sind, nachdem Rhino sich einige Male gekratzt hat?

Lösung. Wenn wir nicht mitzählen, wenn Rhino sich kratzt, ohne dass etwas passiert, verschwinden jedes Mal zwei Falten auf der Seite, an der Rhino sich kratzt und auf der anderen Seite entstehen zwei neue. Damit auf jeder Seite wieder so viele Falten wie am Anfang sind, müsste Rhino sich also auf beiden Seiten gleich oft kratzen.

An der Seite, an der Rhino sich kratzt, verändert sich die Anzahl der horizontalen Falten und die Anzahl der vertikalen Falten jeweils um eine gerade Zahl. An der anderen Seite verändert sich jede Anzahl jeweils um eine ungerade Zahl.

Da Rhino insgesamt 17 Falten hat, ist die Anzahl der Falten auf einer Seite gerade und auf der anderen Seite ungerade. Auf der Seite mit einer geraden Anzahl von Falten ist die Differenz zwischen der Anzahl der horizontalen Falten und der Anzahl von vertikalen Falten gerade. Damit sich diese beiden Anzahlen vertauschen, müssten sie sich also jeweils um eine gerade Zahl ändern, also müsste Rhino sich auf der anderen Seite gerade häufig kratzen. Entsprechend ist die Differenz zwischen der Anzahl von horizontalen Falten und vertikalen Falten auf der Seite mit ungerade vielen Falten ungerade. Damit sich die Anzahlen von horizontalen und vertikalen Falten auf dieser Seite vertauschen, müssten sie sich jeweils um eine ungerade Zahl ändern, Rhino müsste sich also auf der anderen Seite ungerade häufig kratzen.

Es ist also nicht möglich, dass auf jeder Seite die Anzahlen von horizontalen von vertikalen Falten vertauscht sind, nachdem Rhino sich einige Male gekratzt hat. □

O Oberstufe

Aufgabe O.1 (4 P.). Von jeder Ecke eines konvexen Polyeders gehen genau drei Kanten aus und mindestens zwei von ihnen haben die gleiche Länge. Beweise, dass das Polyeder mindestens drei gleich lange Kanten hat.

Lösung. Da von jeder Ecke drei Kanten ausgehen, gibt es genau $\frac{3}{2}$ mal so viele Kanten wie Ecken: Summieren wir für alle Ecken die Anzahl der Kanten an dieser Ecke, erhalten wir dreimal die Anzahl der Ecken. Dies entspricht außerdem zweimal der Anzahl der Kanten, da jede Kante hierbei doppelt gezählt wird (für jede ihrer Endecken einmal). Wenn es jede Kantenlänge nur zweimal gäbe, käme an jeder Ecke eine andere Kantenlänge doppelt vor. Also gäbe es mindestens doppelt so viele Kanten wie Ecken. □

Alternative Lösung. Angenommen, das Polyeder hätte keine drei gleich langen Kanten. Zu einer Ecke A betrachtet man nun die Seitenfläche, an der die beiden gleich langen von dieser Ecke ausgehenden Kanten liegen, und betrachtet die Ecken von dort im Uhrzeigersinn. An der nächsten Ecke B kommt eine Kantenlänge doppelt vor, dies kann nicht die Kante zu A sein, da diese Länge bereits zweimal vorkommt. Also muss die Kante zur nächsten Ecke C ebenso lang sein wie die Kante an B, die außerhalb der Fläche verläuft. Für C ist entsprechend die Kante zur nächsten Ecke ebenso lang wie die Kante außerhalb der Fläche und so weiter. An der Ecke Z vor der ursprünglichen Ecke A kommen nun schon zwei der Kanten je zweimal vor (die nach A sowie die zum Vorgänger von Z auf dem Rand der Fläche). Da die dritte so lang wie eine dieser beiden sein muss, kommt diese Länge doch ein drittes Mal vor im Widerspruch zur Annahme. Das Polyeder muss also doch drei gleich lange Kanten haben. □

Aufgabe O.2 (4 P.)**.** In die Felder eines $2n$-Streifens werden Zahlen auf folgende Weise geschrieben:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ -n,\ \ldots,\ -2,\ -1$$

Ein Spielstein bewegt sich entlang des Streifens: Jedes Mal bewegt er sich um die Anzahl Felder, die das aktuelle Feld angibt, und zwar nach rechts für positive Zahlen und nach links für negative. Es ist bekannt, dass sich der Spielstein von jeder Anfangsposition durch alle Felder des Streifens bewegt. Beweise, dass $2n+1$ eine Primzahl ist.

Lösung. Ist $2n+1$ keine Primzahl, so gibt es einen Teiler k von $2n+1$. Der Abstand zwischen dem Feld mit der Zahl k bis zum Feld mit der Zahl n beträgt $n-k$, genau wie der Abstand vom Feld mit der Zahl $-n$ bis zum Feld mit der Zahl $-k$. Vom Feld mit der Zahl k zum Feld mit der Zahl $-k$ beträgt der Abstand also $2(n-k)+1 = 2n+1-2k$. Da k ein Teiler von $2n+1$ ist, ist der Abstand des Feldes mit k zum Feld $-k$ also ein Vielfaches von k. Jedes Feld hat also entweder einen durch k teilbaren Abstand zu beiden Feldern k und $-k$ oder zu keinem von beiden. Daher haben genau die Felder mit Vielfachen von k einen durch k teilbaren Abstand zu den Feldern k und $-k$. Also sind auch die Abstände dieser Felder zueinander durch k teilbar und die Abstände zu allen anderen Feldern nicht durch k teilbar. Der Spielstein gelangt also von Feldern mit einem Vielfachen von k nur wieder auf Felder mit einem Vielfachen von k, niemals aber auf das Feld mit der 1. Der Spielstein kann nicht jedes Feld von jeder Anfangsposition erreichen. Unter dieser Voraussetzung muss also $2n+1$ eine Primzahl sein. □

Bemerkung. Es ist zwar notwendig, dass $2n+1$ eine Primzahl ist, jedoch reicht dies nicht aus. Zum Beispiel für $n = 3$ oder $n = 8$ erreicht die Spielstein auch nicht jedes Feld von jeder Anfangsposition.

Aufgabe O.3 (5 P.)**.** Von den Graphen von $y = \cos x$ und $x = 100\cos(100y)$ werden die Schnittpunkte markiert, deren Koordinaten beide positiv sind. Sei a die Summe der x-Koordinaten dieser Punkte und b die Summe der y-Koordinaten. Bestimme $\frac{a}{b}$.

Bemerkung: Das Argument des Kosinus wird im Bogenmaß angegeben. Ein Winkel von 360° entspricht im Bogenmaß 2π.

Lösung. Es ist $\frac{a}{b} = 100$. Um dies zu beweisen, zeigen wir zunächst, dass für jeden Schnittpunkt (x, y) der beiden Graphen auch $(x', y') = (100y, \frac{1}{100}x)$ ein Schnittpunkt ist. Dies ist der Fall wegen

$$x' = 100y = 100\cos x = 100\cos(100y')$$

und

$$y' = \frac{1}{100}x = \frac{1}{100} \cdot 100\cos(100y) = \cos x'.$$

Für jeden Schnittpunkt (x, y) ist also entweder $x = 100y$ oder es gibt einen zweiten Schnittpunkt (x', y') mit $x' = 100y$ und $x = 100y'$. Da hierbei zu jedem Summanden von b ein Summand von a gehört, der genau 100-mal so groß ist, ist auch $\frac{a}{b} = 100$. □

Aufgabe O.4 (5 P.)**.** Ein Viereck $ABCD$ ohne parallele Seiten sei in einen Kreis einbeschrieben. X sei ein Berührpunkt zweier Kreise mit Sehnen AB bzw. CD. Beweise, dass alle solchen Punkte X auf einem Kreis liegen.

LÖSUNG. Mit E bezeichnen wir den Schnittpunkt der Geraden durch A und B sowie durch C und D. Nun zeichnen wir eine Tangente durch E an den Kreis und bezeichnen den Berührpunkt mit F, siehe Abbildung 3. Der Sekanten-Tangenten-Satz besagt, dass $|EF|^2 = |EA| \cdot |EB| = |EC| \cdot |ED|$.

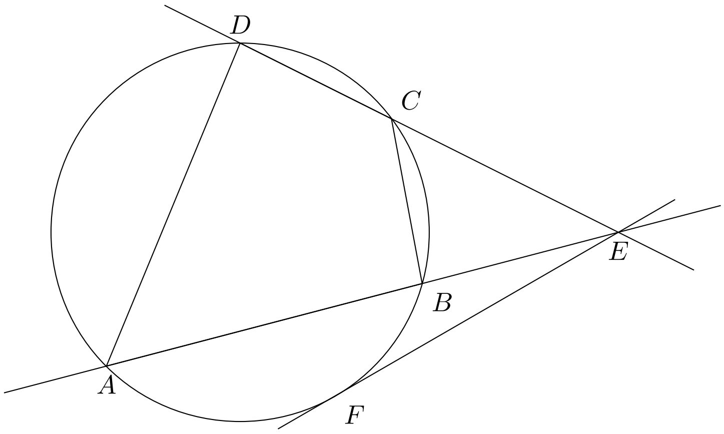

Abbildung 3: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.4.

Sei X ein Punkt wie in der Aufgabenstellung. An den Kreis mit Sehne AB können wir eine Tangente durch E zeichnen. Für den Berührpunkt G gilt dann wiederum $|EG|^2 = |EA| \cdot |EB|$, also hat er den gleichen Abstand von E wie F. Gleiches gilt für den Kreis mit Sehne CD. Somit müssen von den vier Tangenten durch E an den beiden Kreisen zwei zusammen fallen, da die Kreise ansonsten entweder disjunkt sind oder sich schneiden. Damit ist X dann mit den Berührpunkten dieser Tangente und den beiden Kreisen identisch und es gilt $|EX| = |EF|$. Also liegen alle solchen Punkte X auf einem Kreis um E mit Radius $|EF|$.

Um den Beweis zu vervollständigen, hier noch der Beweis des Sekanten-Tangenten-Satzes: Schneiden sich eine Tangente (mit Berührpunkt F) und eine Sekante (mit Schnittpunkten A und B) eines Kreises in einem Punkt E, so gilt $|EF|^2 = |EA| \cdot |EB|$. Zeichnung siehe Abbildung 4. Um dies zu beweisen, zeigen wir, dass die Dreiecke $\triangle EBF$ und $\triangle EFA$ ähnlich sind; dann gilt nämlich $\frac{|EF|}{|EB|} = \frac{|EA|}{|EF|}$ und somit wie gewünscht $|EF|^2 = |EA| \cdot |EB|$.

Die beiden Dreiecke haben offensichtlich den gleichen Winkel an E, es bleibt zu zeigen, dass $\angle EFB = \angle FAE$. Sei P so gewählt, dass FP ein Durchmesser des Kreises ist. Nach dem Peripheriewinkelsatz ist $\angle FPB = \angle FAB = \angle FAE$. Da FP ein Durchmesser ist, ist $\angle PBF$ ein rechter Winkel, also $\angle FAE = \angle FPB = 90^\circ - \angle BFP$. Da auch $\angle EFP$ ein rechter Winkel ist, haben wir $\angle EFB = 90^\circ - \angle BFP = \angle FAE$. Damit ist der Sekanten-Tangenten-Satz bewiesen. □

Aufgabe O.5 (5 P.)**.** Ein weißer Turm steht auf dem Feld B2 und ein schwarzer Turm auf dem Feld C4 eines 8×8-Schachbretts. Zwei Spieler bewegen jeweils ihren Turm abwechselnd, wobei der weiße Turm anfängt. Die Spieler dürfen auf

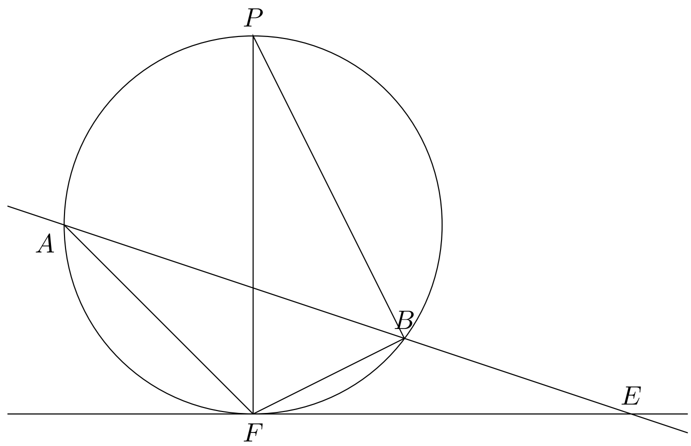

Abbildung 4: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.4.

kein Feld ziehen, das gerade vom anderen Turm bedroht wird oder das vorher schon einmal einer der Türme besucht hat. Ein Spieler verliert, wenn er nicht mehr ziehen kann. Für welchen Spieler gibt es eine Gewinnstrategie (unabhängig von den Zügen des Gegners)?

(Ein Turm bewegt sich immer eine beliebige Anzahl an Feldern entlang einer horizontalen oder vertikalen Linie. Nur das erste und letzte Feld eines Zuges gilt als besucht.)

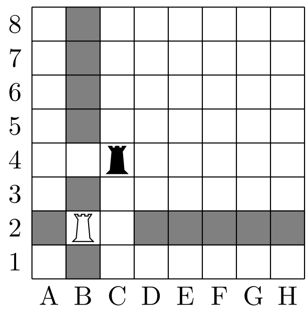

Abbildung 5: Anfangsposition der Türme in Aufgabe O.5 und erlaubte Züge (grau) für den weißen Turm.

Lösung. Der schwarze Turm besitzt eine Gewinnstrategie. Nehmen wir zunächst an, die Anfangsstellung sei anders, nämlich der weiße Turm auf A1 und der schwarze Turm auf E5. Der Abstand dieser beiden Felder ist vier Felder horizontal und vier Felder vertikal. Zwei solche Felder auf dem Schachbrett nennen wir *gegenüberliegend*. Für jedes Feld gibt es genau ein gegenüberliegendes Feld, da für die Richtungen oben und unten sowie links und rechts jeweils genau eine Richtung vier Schritte erlaubt ohne das Brett zu verlassen. Der schwarze Turm kann nun in jedem Schritt auf das Feld ziehen, das dem Feld des weißen Turmes gegenüberliegt. Dazu zieht er, falls der weiße Turm k Felder gezogen ist, k Felder in die gleiche Richtung oder $8 - k$ Felder in die entgegengesetzte Richtung. Auf diese Art wurden nach einem Zug des schwarzen Turmes von je zwei gegenüberliegenden Feldern entweder beide besucht oder beide nicht besucht, also wird der schwarze Turm nie ein bereits besuchtes Feld betreten, ohne dass der weiße Turm dies im vorigen Zug tut. Da ein Turm auch nie das gegenüberliegende Feld bedroht, ist jeder Zug des schwarzen Turmes also erlaubt. Daher gewinnt der schwarze Turm.

Für die vorliegende Anfangsstellung kann der schwarze Turm die gleiche Strategie verwenden, wenn er zuvor die Zeilen und Spalten derart umbenennt, dass die Anfangspositionen A1 und E5 entsprechen. Eine Möglichkeit hierfür ist in Abbildung 6 gezeigt. Er zieht nun jeweils auf das Feld, welches in dieser Benennung dem Feld des weißen Turmes gegenüberliegt (zieht der weiße Turm etwa ein Feld nach oben in Zeile 3, dann zieht der schwarze Turm drei Felder nach oben in Zeile 7).

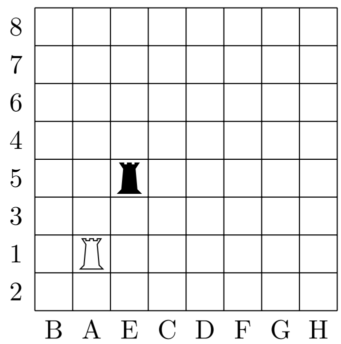

Abbildung 6: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe O.5.

□

Fragen und Anmerkungen. Schicken Sie diese bitte an *Städtewettbewerb Mathematik Hamburg* <stw.m.hh@gmail.com>. An den Lösungen haben mitgewirkt: Mara Sommerfeld, Philipp Sprüssel und Jan Henrik Sylvester.