M Mittelstufe

Aufgabe 1 (3 P.). Auf einer Tafel steht eine ganze Zahl $N > 1$. Alex schreibt nun positive ganze Zahlen dahinter, welche er auf folgende Weise erhält: Er wählt einen Teiler der letzten Zahl an der Tafel und addiert ihn zu dieser letzten Zahl oder subtrahiert ihn davon. Dabei muss der gewählte Teiler größer als 1 sein. Ist es Alex immer möglich, also für jede Ausgangszahl N, auf diese Weise irgendwann die Zahl 2011 an die Tafel zu schreiben?

Aufgabe 2 (4 P.). Im Dreieck $\triangle ABC$ wird der Punkt P auf der Seite AB so gewählt, dass AP doppelt so lang ist wie PB. Außerdem sei Q der Mittelpunkt der Seite AC. Zeige: Falls CP doppelt so lang ist wie PQ, dann ist das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig.

Aufgabe 3 (5 P.). Gegeben sind eine Balkenwaage und einige (mindestens zwei) paarweise verschiedene Gewichte. Wann immer man zwei dieser Gewichte auf eine Seite der Waage legt, kann man die Waage durch eines oder mehrere der anderen Gewichte ausbalancieren. Welches ist die kleinste Anzahl an Gewichten, für die dies möglich ist?

Aufgabe 4 (6 P.). Es ist ein schachbrettartiger Tisch mit 2012 Zeilen und $k > 2$ Spalten gegeben. Ein Spielstein wird in einem Feld der äußersten linken Spalte platziert und zwei Spieler bewegen ihn abwechselnd. Ein Zug besteht darin, den Stein um ein Feld nach rechts, oben oder unten zu bewegen, wobei der Stein nicht auf ein Feld bewegt werden darf, welches er schon einmal belegt hat. Das Spiel endet, sobald der Stein in die äußerste rechte Spalte gezogen wird. Allerdings ist zu Beginn des Spiels nicht bekannt, ob der Spieler, der den letzten Zug macht, gewinnt oder verliert. Dies wird erst bekannt gegeben, sobald der Stein die zweite Spalte von rechts erreicht. Kann einer der Spieler seinen Sieg erzwingen?

Aufgabe 5 (6 P.). Gegeben seien positive Zahlen a, b, c, d kleiner als 1. Zeige: Ist $abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$, dann gilt

$$(a+b+c+d) - (a+c)(b+d) \geq 1.$$

Aufgabe 6 (7 P.). Ein Auto fährt auf einer geraden Straße mit einer konstanten Geschwindigkeit von 60 Kilometern pro Stunde. Parallel zu dieser Straße verläuft ein 100 Meter langer Zaun. Der Beifahrer des Autos misst den Winkel in seinem Blickfeld, welchen der Zaun von seinem Standpunkt aus einnimmt. Dies wiederholt er in Abständen von jeweils einer Sekunde. Beweise, dass die Summe aller dieser Winkel kleiner als $1100°$ ist.

Aufgabe 7 (9 P.). Die Ecken eines regelmäßigen 45-Ecks werden mit drei Farben gefärbt, wobei jede Farbe gleich häufig verwendet wird. Nun wählt man in jeder Farbe drei Ecken aus und betrachtet die Dreiecke, welche von den gewählten gleichfarbigen Punkten gebildet werden. Zeige, dass man die Punkte stets so wählen kann, dass diese drei Dreiecke paarweise kongruent sind.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4,5 Stunden. Viel Erfolg!

O Oberstufe

Aufgabe 1 (4 P.)**.** Pete markiert mehrere Punkte (mehr als zwei) in der Ebene, so dass alle Abstände zwischen ihnen verschieden sind. Ein Paar (A, B) von Punkten heißt *ungewöhnlich*, wenn A der am weitesten von B entfernte Punkt ist und B der am nächsten an A gelegene Punkt (abgesehen von A selbst). Welches ist die größte Zahl an ungewöhnlichen Paaren, die Pete erhalten kann?

Aufgabe 2 (4 P.)**.** Gegeben seien positive Zahlen a, b, c, d kleiner als 1. Zeige: Ist $abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$, dann gilt

$$(a + b + c + d) - (a + c)(b + d) \geq 1.$$

Aufgabe 3 (5 P.)**.** Im Dreieck $\triangle ABC$ seien A_1, B_1 und C_1 die Fußpunkte der Höhen durch die Ecken A, B und C. Die Punkte C_A und C_B seien die Projektionen von C_1 auf AC beziehungsweise BC. Zeige, dass die Gerade C_AC_B die Strecken C_1A_1 und C_1B_1 jeweils in deren Mitte schneidet.

Aufgabe 4. Existiert ein konvexes N-Eck, für welches alle Seiten gleich lang sind und alle Ecken auf der Parabel $y = x^2$ liegen, falls

(a) (3 P.) $N = 2011$;

(b) (4 P.) $N = 2012$?

Aufgabe 5 (7 P.)**.** Wir nennen eine positive ganze Zahl *gut*, wenn sie keine Null als Ziffer hat. Eine gute Zahl heißt *besonders*, falls sie mindestens k Ziffern hat und jede Ziffer größer als die vorhergehende (von links nach rechts gesehen) ist. Eine gute Zahl können wir nun wie folgt verändern: In jedem Schritt wählen wir eine besondere Zahl und fügen diese entweder links, rechts oder zwischen zwei Ziffern zur Dezimaldarstellung der aktuellen Zahl hinzu oder löschen sie aus der Dezimaldarstellung, falls sie darin vorkommt. Was ist das größte k, für welches man auf diese Weise jede gute Zahl in jede andere gute Zahl umwandeln kann?

Aufgabe 6 (7 P.)**.** Zeige, dass für $n > 1$ die Zahl $1^1 + 3^3 + 5^5 + \cdots + (2^n - 1)^{2^n - 1}$ ein Vielfaches von 2^n aber nicht von 2^{n+1} ist.

Aufgabe 7 (9 P.)**.** Ein blauer Kreis wird durch 100 rote Punkte in 100 Kreisbögen unterteilt. Die Längen dieser Bögen sind genau die ganzen Zahlen von 1 bis 100, nicht unbedingt in dieser Reihenfolge. Zeige, dass es stets zwei Sehnen mit roten Endpunkten gibt, die senkrecht aufeinander stehen.

Alle Aussagen sind zu begründen! Bitte eine lesbare Reinschrift anfertigen! An Hilfsmitteln sind nur das ausgegebene Papier, Schreibgerät, Zirkel und Lineal zugelassen. Auf jedem Blatt sind der Name, Vorname und die Nummer der Aufgabe einzutragen. Gewertet werden höchstens drei Aufgaben.

Zeit: 4,5 Stunden. — Viel Erfolg!